

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

12 Luglio 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Due cariche sono distribuite con una densità lineare di carica uniforme $\lambda = 133.516 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}$ su due filamenti di sezione trascurabile e di lunghezza $L_1 = 3a$ ed $L_2 = 2a$. Il filamento carico L_1 è disposto una lungo l'asse delle x positive mentre il filamento carico L_2 è disposto una lungo l'asse delle x negative. Entrambi i filamenti hanno l'estremo più vicino a distanza a dall'origine, come in figura 1. Sapendo che l'ampiezza del campo elettrico totale nell'origine è $|\underline{E}_t(0, 0, 0)| = 0.5 \text{ V/m}$, determinare la lunghezza dei due filamenti.

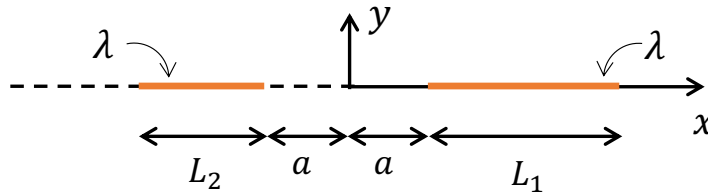


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Il campo elettrostatico $\underline{E}(\underline{r})$ generato in $\underline{r}$ da una distribuzione lineare l di densità di carica è e:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') d\ell' \quad (1)$$

Di conseguenza, il campo elettrostatico generato nell'origine dalla distribuzione sull'asse delle x positive è:

$$\underline{E}_1(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{(a+L_1)} \frac{\lambda}{|x'|^3} (-x'\hat{x}) dx' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(a+L_1)}^a \frac{\lambda}{(x')^2} dx' \hat{x} \quad (2)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x'} \right]_{(a+L_1)}^a \hat{x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a+L_1)} - \frac{1}{a} \right] \hat{x} \quad (3)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L_1}{a(a+L_1)} \hat{x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda}{4a} \hat{x} \quad (4)$$

In modo del tutto analogo è possibile ricavare l'espressione del campo elettrostatico nell'origine generato dalla distribuzione sull'asse delle x negative, dato da:

$$\underline{E}_2(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L_2}{a(a+L_2)} \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{3a} \hat{x} \quad (5)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti il campo elettrico totale nell'origine è:

$$\underline{E}_t(0, 0, 0) = \underline{E}_1(0, 0, 0) + \underline{E}_2(0, 0, 0) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right] \hat{x} \quad (7)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{12a} \hat{x} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (8)$$

Sapendo l'ampiezza del campo elettrico totale nell'origine si ricava:

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{12|\underline{E}_t(0,0,0)|} \cong 0.2 \text{ m} \quad (9)$$

da cui $L_1 = 0.6 \text{ m}$ ed $L_2 = 0.4 \text{ m}$.

Problema 2 (11 punti) Un condensatore ideale in aria a facce piane parallele circolari di raggio $a = 69.67$ cm e distanti $d = 3$ mm viene caricato tramite una generatore di forza elettromotrice costante di valore $\Delta V_0 = 200$ V. Successivamente una lastra di dielettrico omogeneo, isotropo, lineare di costante dielettrica relativa ϵ_r , anch'esso circolare di raggio a ed altezza $d/3$ viene inserita tra le armature come in figura 1 mentre il generatore rimane collegato. Sapendo che la variazione di energia elettrostatica immagazzinata dal condensatore durante l'operazione descritta è $\Delta U = U_f - U_i = 3 \cdot 10^{-5}$ J, determinare il valore della costante dielettrica ϵ_r .

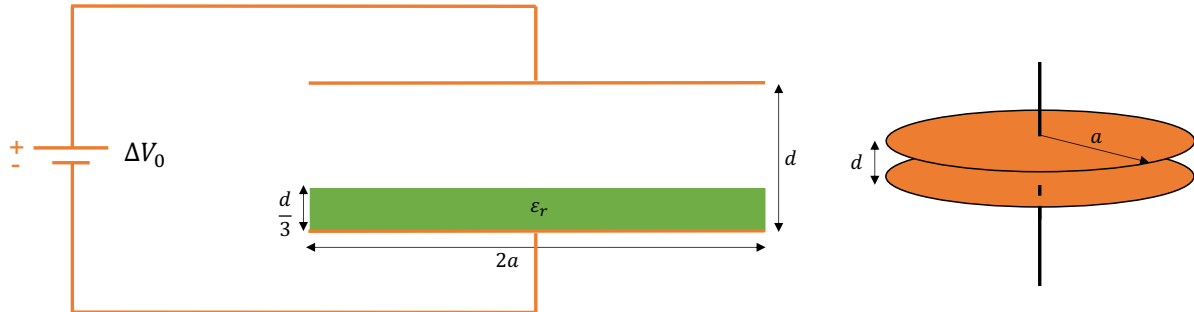


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

L'energia elettrostatica iniziale immagazzinata dal condensatore è:

$$U_i = \frac{1}{2} C_0 (\Delta V_0)^2 = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{2d} (\Delta V_0)^2 \quad \text{J} \quad (10)$$

Un volta introdotta la struttura la differenza di potenziale tra le armature rimane costante ma la carica sulle armature cambia valore perché cambia la capacità del condensatore. In questo caso il condensatore può essere visto come la serie di due condensatori, di capacità

$$C_1 = \frac{3\epsilon_0 \pi a^2}{2d} \quad \text{F} \quad (11)$$

$$C_2 = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r \pi a^2}{d} \quad \text{F} \quad (12)$$

dove con il pedice 2 si è indicata la capacità del condensatore con il dielettrico e con 1 la capacità del condensatore in aria.

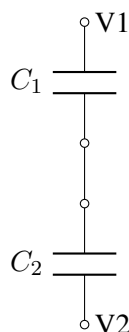


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2 dove $\Delta V_0 = V_1 - V_2$

La capacità totale delle due capacità C_1 e C_2 in serie è:

$$C_T = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \frac{3\epsilon_r}{(2\epsilon_r + 1)} \quad \text{F} \quad (13)$$

L'energia elettrostatica finale immagazzinata dopo l'introduzione del dielettrico è

$$U_f = \frac{1}{2} C_T (\Delta V_0)^2 = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{2d} \frac{3\epsilon_r}{(2\epsilon_r + 1)} (\Delta V_0)^2 \text{ J} \quad (14)$$

La variazione di energia elettrostatica dopo l'introduzione del dielettrico è quindi

$$\Delta U = U_i - U_f = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{2d} (\Delta V_0)^2 \left[\frac{3\epsilon_r}{(2\epsilon_r + 1)} - 1 \right] \quad (15)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{2d} (\Delta V_0)^2 \left[\frac{(\epsilon_r - 1)}{(2\epsilon_r + 1)} \right] \text{ J} \quad (16)$$

La precedente equazione può essere riscritta come:

$$\frac{(\epsilon_r - 1)}{(2\epsilon_r + 1)} = \frac{\Delta U 2d}{\epsilon_0 \pi a^2 (\Delta V_0)^2} \quad (17)$$

Ponendo

$$\frac{\Delta U 2d}{\epsilon_0 \pi a^2 (\Delta V_0)^2} = A \quad (18)$$

e risolvendo rispetto ad ϵ_r si ottiene

$$\epsilon_r = \frac{A + 1}{1 - 2A} \quad (19)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene che $A = 1/3$ ed infine $\epsilon_r = 4$.

Problema 3 (8 punti) Il circuito elettrico mostrato in figura è formato da un filo conduttore composto da due tratti rettilinei PQ e MN e da due archi di circonferenza QM e NP di raggio $R_1 = 5.84$ cm ed $R_2 = 2R_1$ e centro nell'origine del sistema di riferimento. I tratti MN e PQ si trovano sui due raggi dei due archi di circonferenza concentrici e sono inclinati fra loro di $\alpha = 90^\circ$, come mostrato in figura 4. Il circuito è percorso da una corrente stazionaria $I = 50$ A e si trova immerso in un campo magnetico uniforme stazionario di induzione $\underline{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$. Sapendo che il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso è $\underline{M} = (-2\hat{x} + 4.5\hat{y}) \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$, determinare le componenti del vettore induzione magnetica B_x e B_y .

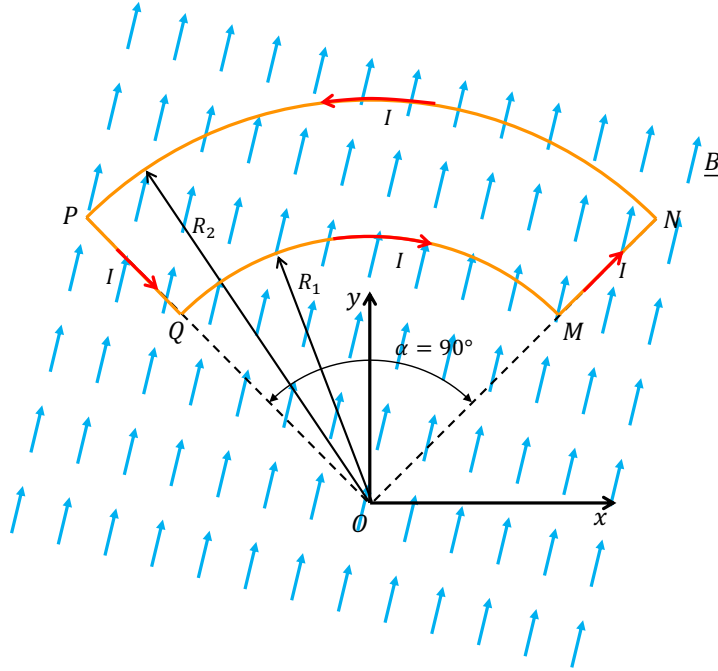


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso è $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$ dove $\underline{m} = IS\hat{n}$ è il momento magnetico associato alla spira chiusa, S è l'area racchiusa dal circuito e $\hat{n}$ la normale al piano del circuito che vede circolare la corrente in senso antiorario. L'area del circuito chiuso è

$$S = \frac{\pi R_2^2}{4} - \frac{\pi R_1^2}{4} = \frac{3\pi R_1^2}{4} \quad (20)$$

Il momento magnetico è quindi:

$$\underline{m} = \frac{3\pi R_1^2}{4} I \hat{z} \quad (21)$$

L'espressione del momento meccanico è

$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B} = \frac{3\pi R_1^2}{4} I \hat{z} \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y}) \quad (22)$$

$$= \frac{3\pi R_1^2}{4} I B_x \hat{y} - \frac{3\pi R_1^2}{4} I B_y \hat{x} \quad (23)$$

Uguagliando le espressioni delle componenti del momento meccanico dell'espressione precedente al dato del problema si ottiene $B_x = 1.12 \cdot 10^3 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$ e $B_y = 0.5 \cdot 10^3 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$

Problema 4 (8 punti) Un circuito chiuso è formato da un solenoide a sezione quadrata di lato $L = 0.1$ m, composto da $N = 50$ spire di filo conduttore a sezione circolare di raggio $a = 0.5$ mm e resistività $\rho = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$. Il solenoide è tenuto in movimento in modo tale che il suo moto sia sempre rettilineo uniforme lungo $\hat{x}$ con velocità $\underline{v} = v_x \hat{x}$ parallela ad uno dei suoi lati e il suo asse sia costantemente parallelo all'asse z . All'istante $t = 0$ il solenoide entra nella regione $x > 0$ in cui è presente un campo uniforme di induzione $\underline{B} = B_{0x} \hat{x} + B_{0z} \hat{z}$ di ampiezza $|\underline{B}| = 0.3$ T, che forma un angolo di $\alpha = 45^\circ$ rispetto all'asse z . Sapendo che la potenza dissipata nel solenoide è $P = 497$ mW, calcolare la velocità $\underline{v} = v_x \hat{x}$.

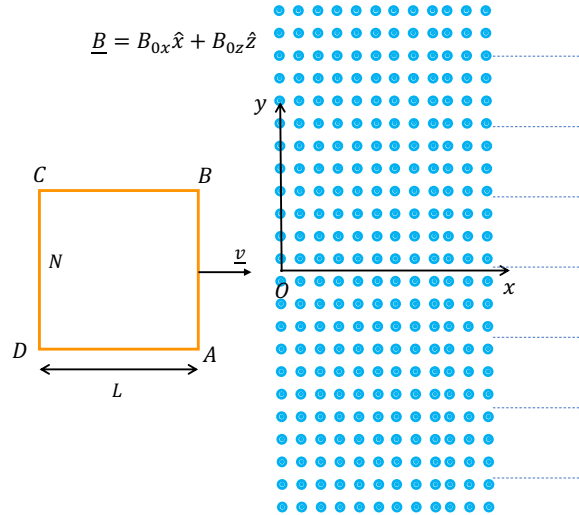


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione al problema 4

Dal tempo $t = 0$ fino al tempo $t_1 = L/v_x$ il solenoide entra nella regione in cui è presente il campo di induzione magnetica. Si registra dunque un aumento del flusso del campo che attraversa la spira, e di conseguenza si produrrà, secondo la legge di Faraday, Neumann e Lenz, una f.e.m. che, essendo il circuito costituito da filo conduttore, farà circolare una corrente I . All'istante di tempo generico $0 < t < t_1$, il tratto $x(t)$ di solenoide che sarà entrato nel campo di induzione magnetica è

$$x(t) = v_x t \quad \text{m} \quad (24)$$

Il flusso attraverso il solenoide all'istante t sarà dato da:

$$\Phi(t) = \iint_S \underline{B}(\underline{r}, t) \cdot \hat{n} ds \quad (25)$$

$$= (B_{0x} \hat{x} + B_{0z} \hat{z}) \cdot (NLv_x t) \hat{z} \quad (26)$$

$$= B_0 \cos(45^\circ) NLv_x t \quad \text{Wb} \quad (27)$$

Il modulo della f.e.m. indotta varrà dunque

$$\mathcal{E}_i = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_0 \frac{\sqrt{2}}{2} NLv_x \quad \text{V} \quad (28)$$

Se indichiamo con $l = N4L$ la lunghezza totale del filo conduttore che costituisce il solenoide, la resistenza totale R del filo è data da:

$$R = \frac{\rho l}{\pi a^2} = \frac{\rho N4L}{\pi a^2} \cong 25.46 \quad \Omega \quad (29)$$

La potenza dissipata sulla resistenza è data da:

$$P = \frac{(\mathcal{E}_i)^2}{R} = \frac{B_0^2 N L v_x^2 \pi a^2}{8\rho} \text{ W} \quad (30)$$

Da cui risolvendo rispetto alla velocità

$$v_x = \sqrt{\frac{P 8\rho}{B_0^2 N L \pi a^2}} \cong 3.35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (31)$$