

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

1 Settembre 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Una sfera conduttrice di raggio R_1 , scarica, è avvolta da un guscio sferico concentrico ad essa, con raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 2R_1$, nel cui volume è distribuita una carica elettrica con densità volumetrica $\rho_v(r) = k/r$ [C/m³], essendo r la distanza radiale dal centro e k una costante. Nell'ipotesi che sia $k = 2.125 \cdot 10^{-9}$ [C/m²] e $R_1 = 0.5$ m si determini il potenziale totale a cui si trova la sfera conduttrice.

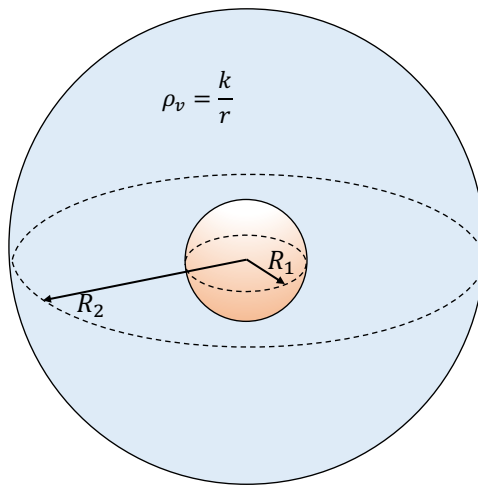


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

La sfera conduttrice è una regione equipotenziale per cui è sufficiente calcolare il potenziale su un qualsiasi punto della sua superficie. Vista la simmetria sferica si può calcolare il campo elettrico utilizzando il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie sferica di raggio r per i due casi $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$. Essendo il campo elettrico, per simmetria sferica diretto solo radialmente in tutti i punti della superficie sferica di raggio r , avremo per entrambi i casi

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

dove Q è la carica totale netta contenuta all'interno della superficie sferica.

1) $R_1 < r < R_2$. La carica totale contenuta all'interno della superficie sferica è

$$Q = \iiint_V \rho(r') dv' = \int_{R_1}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{r'^2} (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' = k4\pi \int_{R_1}^r r' dr' = k2\pi(r^2 - R_1^2) \quad (2)$$

La legge di Gauss assume la forma

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{k2\pi(r^2 - R_1^2)}{\epsilon_0} \quad (3)$$

da cui

$$\underline{E}_1(r) = \frac{k(r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{k}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) \hat{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4)$$

2) $r > R_2$. Sostituendo $r = R_2 = 2R_1$ nella precedente espressione della carica totale si ottiene:

$$Q = k2\pi(4R_1^2 - R_1^2) = k6\pi R_1^2 \quad (5)$$

e per quanto riguarda il campo elettrico

$$\underline{E}_2(r) = \frac{k3R_1^2}{2\epsilon_0 r^2} \hat{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (6)$$

Poiché il campo elettrico è radiale la differenza di potenziale può essere calcolata integrando il campo elettrico statico lungo il percorso rettilineo che va dall' ∞ fino ad un punto A sulla superficie

$$V_A - V_\infty = - \int_{\infty}^A \underline{E}(r) \cdot \underline{dr} = \int_{R_1}^{R_2} \underline{E}_1(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_2}^{\infty} \underline{E}_2(r) \cdot \hat{r} dr \quad (7)$$

(8)

Essendo la carica confinata al finito si ha $V(\infty) = 0$ per cui

$$V_A = \int_{R_1}^{R_2} \frac{k}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{k3R_1^2}{2\epsilon_0 r^2} dr \quad (9)$$

$$= \frac{k}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1) + \frac{k}{2\epsilon_0} R_1^2 \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] + \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{3R_1^2}{R_2} \quad (10)$$

$$= \frac{k}{2\epsilon_0} R_1 - \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{R_1}{2} + \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{3R_1}{2} \quad (11)$$

$$= \frac{k}{\epsilon_0} R_1 \cong 120 \text{ V} \quad (12)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore cilindrico, ideale, a sezione circolare e di lunghezza $L = 0.5$ m è costituito da un'armatura cilindrica esterna di raggio c coassiale ad un'armatura interna cilindrica di raggio a . L'interno del condensatore è composto da due gusci cilindrici di materiale dielettrico, omogeneo, isotropo. Quello più interno ha raggio interno a , raggio esterno b e costante dielettrica relativa $\epsilon_{r1} = 4$, quello più esterno ha raggio interno b raggio esterno c e costante dielettrica relativa $\epsilon_{r2} = 16$. Nell'ipotesi che $b = 2a$ e $c = 3a$ e che il condensatore sia mantenuta ad differenza di potenziale $\Delta V = 207$ V, determinare l'energia elettrostatica immagazzinata.

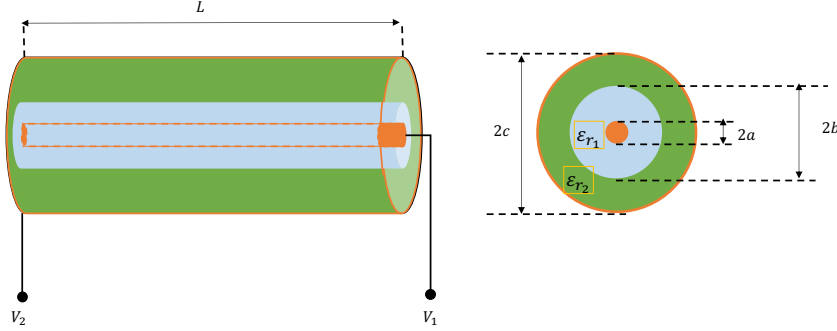


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

Il condensatore può essere visto come la serie di due condensatori cilindrici (vedi figura 3). Le capacità

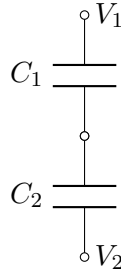


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

dei singoli condensatori sono

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln(2)} \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}L}{\ln\left(\frac{c}{b}\right)} = \frac{16\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \quad (14)$$

La capacità totale di due condensatori in serie è il parallelo delle due capacità per cui si ha:

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}L}{\epsilon_{r2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \epsilon_{r1}\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \cong 140.04 \cdot 10^{12} \text{ F} \quad (15)$$

L'energia elettrostatica immagazzinata a differenza di potenziale ΔV_N nella nuova configurazione è

$$U = \frac{1}{2} C_T \Delta V^2 \cong 3 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad (16)$$

Dimostrazione della equivalenza di figura 3

Il campo elettrico in un qualsiasi punto all'interno dei due dielettrici può essere calcolato applicando il teorema di Gauss per dielettrici ad una superficie cilindrica di raggio r_c con $a < r_c < b$ e $b < r_c < c$. Poiché l'induzione elettrica $\underline{D}(r)$ risulta costante su tutta la superficie di Gauss e normale a questa si ha:

$$D_r \cdot 2\pi r_c L = Q \quad (17)$$

da cui

$$\underline{D}(r_c) = \frac{Q}{2\pi L r_c} \hat{r}_c \quad (18)$$

Poiché il materiale è omogeneo e isotropo, all'interno dei due dielettrici risulta $\underline{D}_{1,2}(r_c) = \epsilon_0 \epsilon_{r1,2} \underline{E}(r_c)$ da cui

$$\underline{E}_{1,2}(r_c) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1,2} L r_c} \hat{r}_c \quad (19)$$

Il campo elettrico è sempre radiale per cui per calcolare la differenza di potenziale può essere integrato lungo un cammino rettilineo normale alle armature. Si ottiene quindi:

$$V_2 - V_1 = - \int_c^b \underline{E}_2(r) \cdot \hat{r}_c dr_c - \int_b^a \underline{E}_1(r) \cdot \hat{r}_c dr_c \quad (20)$$

$$= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}} \int_a^b \frac{1}{r_c} dr_c + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \int_b^c \frac{1}{r_c} dr_c \right] \quad (21)$$

$$= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \left(\frac{c}{b} \right) \right] \quad (22)$$

Ricordando che $C = \frac{Q}{\Delta V}$ si ottiene facilmente

$$\frac{1}{C} = \frac{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} L} + \frac{\ln \left(\frac{c}{b} \right)}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} L} \quad (23)$$

da cui segue la (15)

Problema 3 (8 punti) Un solenoide di lunghezza $l = 0.5$ m e raggio $a = 0.03$ m, è composto da $N = 1000$ spire compatte ed è percorso da una corrente stazionaria I . Al suo interno è inserita parallelamente all'asse una barra a sezione circolare di materiale ferromagnetico isotropo, lineare ed omogeneo di permeabilità $\mu_r = 301$ e raggio $b = a/2$ (vedi figura 4). Sapendo che sulla superficie della barra cilindrica ferromagnetica scorre una corrente di magnetizzazione con densità superficiale uniforme $J_{ms} = -3 \cdot 10^6 \hat{\phi}$ [A/m] calcolare intensità e verso di percorrenza della corrente I . (Suggerimento: essendo $l \gg a$, si consideri il solenoide infinitamente lungo.)

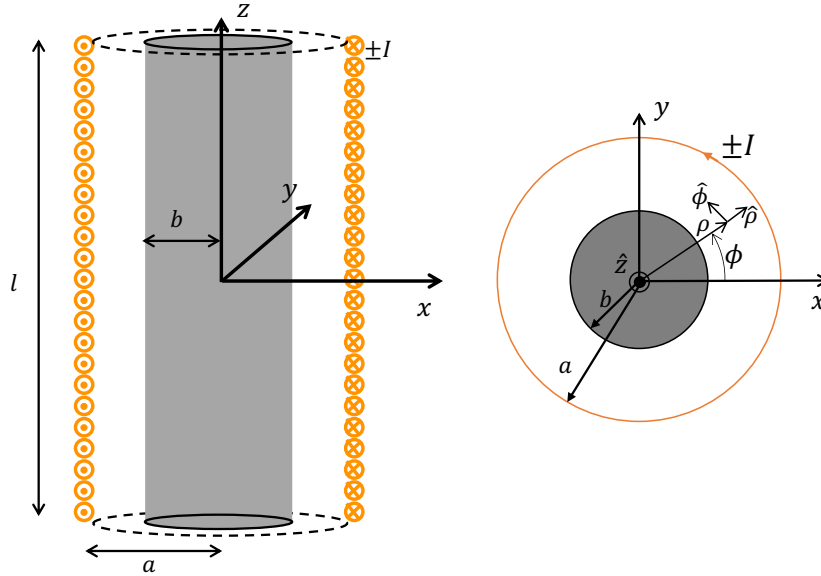


Figura 4: Geometria del problema 3

molto lungo rispetto al suo diametro $l \gg a$ (solenoido infinitamente lungo) e compatto

Soluzione del problema 3

Nell'ipotesi di solenoide infinito il campo magnetico $\underline{H}$ generato all'interno è uniforme e diretto secondo l'asse del cilindro e vale (Esercizio E.6.2 Mencuccini):

$$\underline{H} = nI(\pm \hat{z}) \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (24)$$

dove $n = N/l = 2000$ è il numero di spire per unità di lunghezza e il segno $\pm$ dipende dal verso di percorrenza della corrente (+ se antiorario e $-$ se orario). Il vettore di magnetizzazione all'interno della barra è uniforme e dato da:

$$\underline{M} = \mu_r \underline{H} - \underline{H} = (\mu_r - 1)\underline{H} = (\mu_r - 1)nI(\pm \hat{z}) \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (25)$$

Essendo il vettore $\underline{M}$ uniforme, all'interno della barra non saranno presenti densità di correnti volumetriche di magnetizzazione. Le sole densità correnti di magnetizzazione presenti saranno di tipo superficiale date da

$$J_{ms}(\underline{\rho}) = \underline{M} \times \hat{\rho}|_{\rho=b} = (\mu_r - 1)nI(\pm \hat{\phi}) \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (26)$$

dove $\hat{\rho}$ è la normale alla superficie su cui scorre la densità superficiale di corrente di magnetizzazione. La densità di corrente è costante e scorre in senso azimutale. Confrontando con i dati del problema si ha

$$(\mu_r - 1)nI(-\hat{\phi}) = 3 \cdot 10^6(-\hat{\phi}) \quad (27)$$

Da cui si ottiene $I = 5$ A diretta in senso orario rispetto all'asse z .

Problema 4 (8 punti) Sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono presenti due barrette rigide di uguale lunghezza $a = 0.5$ m e di sezione trascurabile rispetto alla lunghezza. Con riferimento alla figura 5, la barretta OP , allineata con l'asse x , è formata da materiale conduttore di resistenza totale $R = 16.7 \Omega$, mentre la barretta PQ , parallela all'asse y è formata da conduttore ideale. Una terza barra di conduttore ideale molto lunga, è vincolata a ruotare intorno all'origine e, durante la rotazione in senso antiorario, si appoggia strisciando con contatto elettrico sulla barra PQ , a formare un circuito chiuso. La sbarra ruota in senso antiorario con velocità angolare costante ω e tutto il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica costante $\underline{B} = 0.3\hat{z}$ T. Sapendo che la sbarra mobile impiega $\Delta t = 0.2$ secondi per spostarsi dalla posizione OP alla posizione OQ , calcolare la corrente indotta nel circuito dopo un intervallo di tempo di $\Delta t_1 = 0.09$ secondi dall'istante in cui la sbarra si trova allineata con l'asse x .

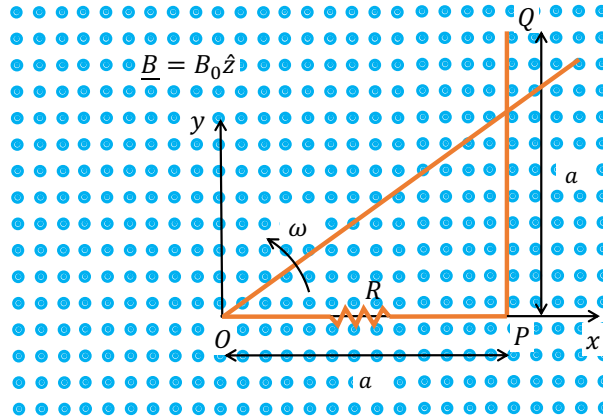


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione al problema 4

La sbarra ruota di 45° in 0.2 secondi per cui la velocità angolare è

$$\omega = \frac{\pi}{4} \frac{1}{0.2} = \frac{5\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (28)$$

Indichiamo con $t_0 = 0$ s l'istante di tempo in cui la barra ruotante si trova allineata con la barra OP e con $t_1 = 0.2$ s l'istante di tempo in cui la sbarra si trova allineata con il tratto OQ . Al generico istante $t_0 < t < t_1$ l'altezza $h(t)$ dall'asse x del contatto tra la barra rotante e la barra PQ è:

$$h(t) = a \tan(\omega t) \quad \text{m} \quad (29)$$

L'area del circuito chiuso è

$$s(t) = \frac{a \cdot h(t)}{2} = \frac{a^2 \tan(\omega t)}{2} \quad \text{m}^2 \quad (30)$$

Dato che il campo magnetico è uniforme e diretto perpendicolarmente all'area $s(t)$, il flusso totale all'istante t è

$$\Phi(t) = B_0 s(t) = B_0 \frac{a^2 \tan(\omega t)}{2} \quad \text{Wb} \quad (31)$$

L'intensità f.e.m indotta all'istante t risulta quindi

$$\mathcal{E}_i = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \frac{B_0 a^2 \omega}{2 \cos^2(\omega t)} \quad \text{V} \quad (32)$$

Infine l'intensità della corrente indotta è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{B_0 a^2 \omega}{2R \cos^2(\omega t)} \quad \text{A} \quad (33)$$

Per $t = 0.09$ s si ha quindi $I(0.09) \cong 0.01$ A, con senso di circolazione *orario*, dato che al tempo t il flusso è in aumento.