

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

23 Settembre 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Due cariche sono distribuite con di densità lineare uniforme di carica $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_2 = -\sqrt{3}\lambda$ su due filamenti di sezione trascurabile, entrambi di lunghezza $L = 3a$. Il filamento con densità di carica λ_1 è disposto una lungo l'asse delle x negative mentre il filamento con densità di carica λ_2 è disposto una lungo l'asse delle y negative. Entrambi i filamenti hanno l'estremo più vicino a distanza $a = 20.23$ cm dall'origine, come in figura 1. Sapendo che l'ampiezza del campo elettrico totale nell'origine è $|\underline{E}_t(0, 0, 0)| = 200$ V/m, determinare i valori delle due densità di carica.

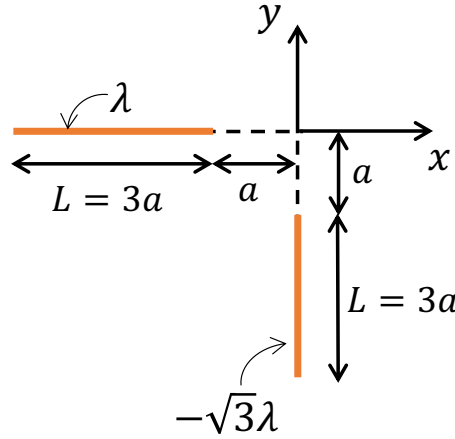


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Il campo elettrostatico $\underline{E}(\underline{r})$ generato in $\underline{r}$ da una distribuzione lineare l di densità di carica è e:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\underline{r}') d\mathbf{l}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') \quad (1)$$

Considerando la distribuzione sull'asse delle x negative si ha $\underline{r}' = x'(-\hat{x})$ con $a < x' < (a + L)$, $(\underline{r} - \underline{r}') = x'\hat{x}$, $|\underline{r} - \underline{r}'| = |x'|$ e $d\mathbf{l}' = dx'\hat{x}$ per cui il campo elettrostatico generato nell'origine può essere scritto come:

$$\underline{E}_1(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{(a+L)} \frac{\lambda_1}{|x'|^3} (-x')\hat{x} dx' \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{(a+L)} \frac{\lambda_1}{(x')^2} \hat{x} dx' \quad (3)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1 L}{a(a+L)} \hat{x} \quad (4)$$

ed essendo $L = 3a$ si ottiene

$$\underline{E}_1(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda_1}{4a} \hat{x} \quad (5)$$

In modo del tutto analogo è possibile ricavare l'espressione del campo elettrostatico nell'origine generato dalla distribuzione sull'asse delle y negative, dato da:

$$\underline{E}_2(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_2 L}{a(a + L_2)} \hat{y} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\sqrt{3}\lambda_1}{4a} \hat{y} \quad (6)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti il campo elettrico totale nell'origine è:

$$\underline{E}_t(0, 0, 0) = \underline{E}_1(0, 0, 0) + \underline{E}_2(0, 0, 0) \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda_1}{4a} \left[\hat{x} - \sqrt{3}\hat{y} \right] \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (8)$$

L'ampiezza del campo elettrico totale nell'origine è

$$|\underline{E}_t(0, 0, 0)| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda_1}{2a} \quad (9)$$

Sapendo l'ampiezza del campo elettrico totale nell'origine si ricava:

$$\lambda_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 |\underline{E}_t(0, 0, 0)| 2a}{3} \cong 3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}} \quad (10)$$

da cui infine $\lambda_2 = -\sqrt{3}\lambda \cong -5.2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}}$.

Problema 2 (8 punti) Un condensatore cilindrico, ideale, a sezione circolare e di lunghezza L è costituito da un'armatura interna cilindrica di raggio a e una cilindrica esterna di raggio b . L'interno del condensatore è riempito per $1/3$ da un materiale dielettrico omogeneo isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_{r1} . Il restante spazio è costruito in modo da poter essere riempito da un liquido di costante dielettrica incognita ϵ_{r2} . Il condensatore senza liquido viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale $\Delta V_0 = V_2 - V_1$ tra le due armature e quindi isolato. Successivamente la parte in aria viene completamente riempita di liquido. Alla fine del processo si misura una differenza di potenziale ΔV_f . Si ricavi l'espressione esplicita della costante dielettrica relativa del liquido ϵ_{r2} in funzione solo del rapporto $\frac{\Delta V_0}{\Delta V_f}$ e di ϵ_{r1} .

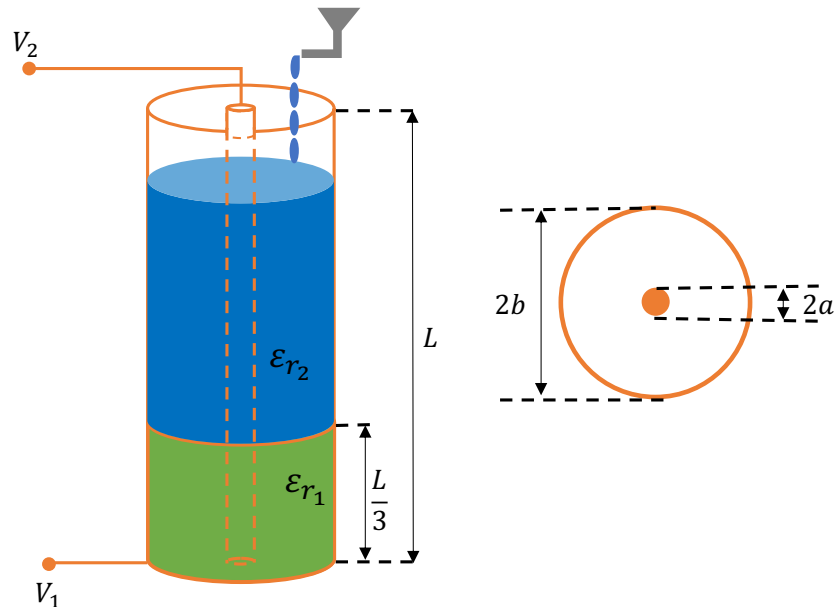


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

Il condensatore senza liquido può essere visto come il parallelo di due condensatori cilindrici (vedi figura 3). La capacità del condensatore con il dielettrico presente per $1/3$ della lunghezza è

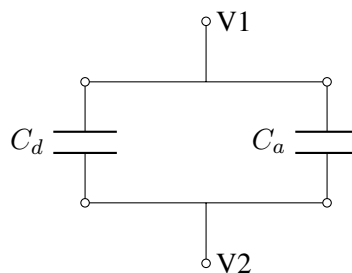


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

$$C_d = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}L}{3\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (11)$$

mentre la capacità del condensatore in aria è

$$C_a = \frac{4\pi\epsilon_0L}{3\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (12)$$

La capacità totale di due condensatori in parallelo è:

$$C_i = C_d + C_a = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}L}{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{4\pi\epsilon_0L}{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (13)$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0L}{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} (\epsilon_{r1} + 2) \text{ F} \quad (14)$$

Alla fine del processo di carica sulle armature è presente una carica totale

$$Q_i = C_i \Delta V_0 = \frac{2\pi\epsilon_0L}{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} (\epsilon_{r1} + 2) \Delta V_0 \quad (15)$$

Nella seconda fase il condensatore viene isolato e poi la parte in aria riempita completamente di liquido. Alla fine di questo processo la carica sul condensatore rimane la stessa ma la capacità totale diventa:

$$C_f = C_d + C_l = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}L}{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}L}{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (16)$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0L}{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} (\epsilon_{r1} + 2\epsilon_{r2}) \text{ F} \quad (17)$$

Poichè la carica è la stessa, la differenza di potenziale ΔV_f ai capi delle armature alla fine del processo diventa

$$\Delta V_f = \frac{Q_i}{C_f} = \frac{C_i}{C_f} \Delta V_0 = \frac{(\epsilon_{r1} + 2)}{(\epsilon_{r1} + 2\epsilon_{r2})} \Delta V_0 \quad (18)$$

da cui si ricava

$$\epsilon_{r2} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V_f} + \frac{\epsilon_{r1}}{2} \left(\frac{\Delta V_0}{\Delta V_f} - 1 \right) \quad (19)$$

Problema 3 (8 punti) Il circuito elettrico mostrato in figura è formato da un filo conduttore composto da quattro tratti rettilinei MN , NP , PQ e QR e da un arco di circonferenza RM di raggio $R_1 = 0.3$ m e centro nell'origine del sistema di riferimento. I tratti MN e QR si trovano sul prolungamento dei due raggi dell'arco di circonferenza e sono inclinati fra loro di $\alpha = 120^\circ$, come mostrato in figura 4. I due tratti rettilinei NP e PQ congiungono i punti N e Q con il punto P . I punti N , P , Q si trovano tutti alla stessa distanza dall'origine $|\vec{ON}| = |\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = L = 2R_1$. Il circuito è percorso da una corrente stazionaria $I = 100$ A e si trova immerso in un campo magnetico uniforme stazionario di induzione $\underline{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$. Sapendo che il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso è $\underline{M} = (-30.02\hat{x} + 10\hat{y})$ N·m, determinare le componenti del vettore induzione magnetica B_x e B_y .

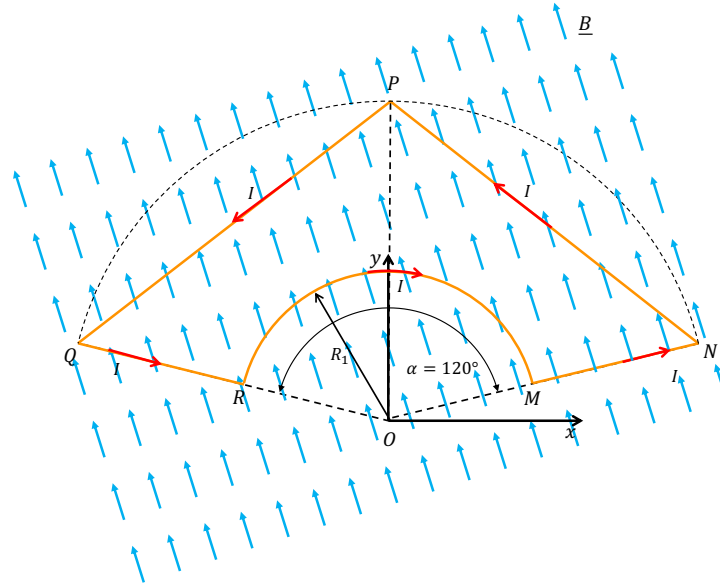


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso è $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$ dove $\underline{m} = IS\hat{n}$ è il momento magnetico associato alla spira chiusa, S è l'area racchiusa dal circuito e $\hat{n}$ la normale al piano del circuito che vede circolare la corrente in senso antiorario. I due triangoli ONP e OPQ sono triangoli equilateri per cui l'area del circuito chiuso è

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{4}L^2 - \frac{\pi R_1^2}{3} = \left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 \quad (20)$$

Il momento magnetico è quindi:

$$\underline{m} = \left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I \hat{z} \quad (21)$$

L'espressione del momento meccanico è

$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B} = \left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I \hat{z} \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y}) \quad (22)$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I B_x \hat{y} - \left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I B_y \hat{x} \quad (23)$$

Si ha quindi

$$M_x = -\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I B_y \quad (24)$$

$$M_y = \left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I B_x \hat{y} \quad (25)$$

da cui si ottiene

$$B_x = \frac{M_y}{\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I} \cong 0.46 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (26)$$

$$B_y = \frac{-M_x}{\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) R_1^2 I} \cong 1.38 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (27)$$

Problema 4 (8 punti) Una sbarretta rigida conduttrice di resistenza trascurabile, si appoggia con contatto elettrico su due binari conduttori rettilinei paralleli anch'essi di resistenza trascurabile, posti sul piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano a distanza $L = 0.5$ m, come mostrato figura 5. la sbarretta rigida è vincolata a muoversi strisciando sui due binari e mantenendo un angolo fisso di $\alpha = 60^\circ$ rispetto all'asse x , come in figura. Il circuito è chiuso in corrispondenza dell'origine da un conduttore di resistenza totale $R = 50 \Omega$. Partendo dalla posizione iniziale in cui il punto Q di contatto coincide con il punto M la sbarretta viene fatta muovere a velocità costante $\underline{v} = v_x \hat{x}$. Il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica costante $\underline{B} = B_0 \hat{z}$. Sapendo che la potenza elettrica dissipata sulla resistenza è $P_d = 0.5$ W, calcolare la velocità con cui si muove la sbarretta e la forza meccanica che occorre esercitare per mantenere la sbarretta in moto rettilineo lungo x a velocità costante.

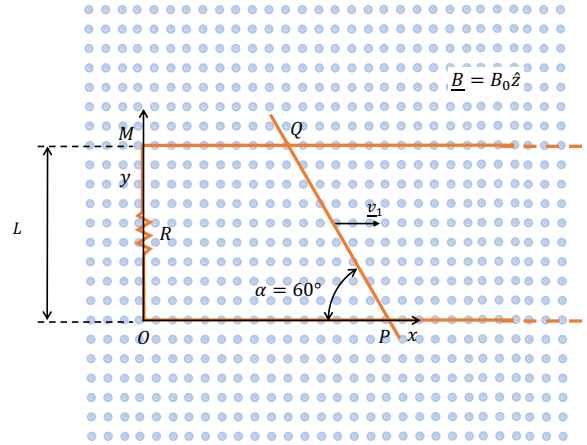


Figura 5: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 4

All'istante generico $0 < t$, la posizione $x_Q(t)$ del punto di contatto Q della sbarretta rispetto all'asse y durante il moto è data dalla legge

$$x_Q(t) = v_x t \quad (28)$$

Analogamente la posizione del punto di contatto P allo stesso istante è

$$x_P(t) = v_x t + \frac{L}{\sqrt{3}} \quad (29)$$

L'area del circuito chiuso all'istante generico $0 < t$ è quindi

$$S(t) = Lv_x t + \frac{L^2}{2\sqrt{3}} \quad (30)$$

Essendo il campo di induzione magnetica costante e perpendicolare al piano della spira, il flusso totale all'istante t è quindi:

$$\Phi(t) = B_z S(t) = B_z Lv_x t + B_z \frac{L^2}{2\sqrt{3}} \quad (31)$$

L'ampiezza $|\mathcal{E}_i(t)|$ della f.e.m indotta all'istante t è:

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_z Lv_x \quad (32)$$

Poiché il flusso aumenta durante il moto la corrente indotta $I_i(t)$ nella spira dalla forza elettromotrice circolerà in senso *orario* e la sua ampiezza sarà:

$$I_i(t) = \frac{|\mathcal{E}_i(t)|}{R} = \frac{B_z Lv_x}{R} \quad (33)$$

La corrente indotta è costante per cui anche la potenza elettrica dissipata è costante e vale

$$P_d = RI_i^2 = \frac{B_z^2 L^2 v_x^2}{R} \quad (34)$$

da cui si ricava

$$v_x = \frac{\sqrt{P_d R}}{B_z L} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (35)$$

La forza magnetica che agisce sulla sbarra al tempo t è data quindi da

$$\underline{F}_M = I_i \overrightarrow{QP} \times (B_z \hat{z}) \quad (36)$$

essendo $\overrightarrow{QP} = L \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{x} - \hat{y} \right)$ (si ricordi che la corrente circola in senso orario).

Eseguendo il prodotto vettoriale si ottiene¹:

$$\underline{F}_M = I_i L \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{x} - \hat{y} \right) \times (B_z \hat{z}) = -I_i B_z L \hat{x} - I_i B_z L \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{y} \quad (37)$$

$$= - \frac{B_z^2 L^2 v_x}{R} \left(\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{y} \right) \cong -0.05 \hat{x} - 0.0289 \hat{y} \text{ N} \quad (38)$$

¹La componente secondo $-\hat{y}$ serve ad annullare la componente della forza magnetica lungo $\hat{y}$, altrimenti la sbarretta si muoverebbe anche in senso verticale, ma non compie lavoro. La componente secondo $-\hat{x}$ serve a mantenere in moto la sbarretta e compie lavoro