

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2021-2022)

4 Novembre 2022

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Problema 1 (8 punti) Quattro cariche puntiformi sono posizionate ai vertici $ABCD$ di un quadrato di lato $2L = 2 \text{ m}$ giacente sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Il centro del quadrato coincide con l'origine del sistema di riferimento (vedi figura 1). I valori delle quattro cariche sono rispettivamente $Q_A = Q_C = -Q$ e $Q_B = Q_D = 2Q$ con $Q = 2 \text{ nC}$. Calcolare l'espressione del campo elettrostatico in un punto generico $P = (0, 0, z)$ dell'asse $z > 0$ e determinare, se esiste, il valore $z_{max} > 0$ del punto in cui si ha un massimo del campo elettrostatico.

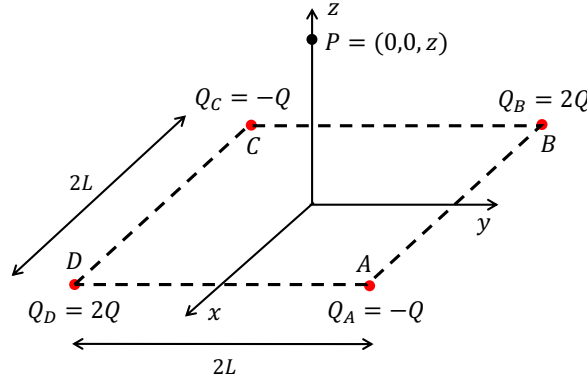


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Consideriamo inizialmente le due cariche puntiformi di valore $-Q$ poste in $A = (L, L, 0)$ e $C = (-L, -L, 0)$. Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti e sfruttando le simmetrie del problema, il campo elettrostatico totale $\underline{E}_{AC}(z)$ generato da queste due cariche in un punto generico $P = (0, 0, z)$ è dato da :

$$\underline{E}_{AC}(z) = -\frac{k_e 2Qz}{(2L^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (1)$$

dove $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

In modo analogo il campo elettrostatico totale $\underline{E}_{BD}(z)$ generato dalle due cariche puntiformi di valore $2Q$ poste in $B = (-L, L, 0)$ e $D = (L, -L, 0)$ in un punto generico $P = (0, 0, z)$ è dato da :

$$\underline{E}_{BD}(z) = \frac{k_e 4Qz}{(2L^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (2)$$

Il campo elettrostatico totale $\underline{E}(z)$ nel punto di osservazione P è la somma vettoriale dei due campi elettrostatici appena determinati:

$$\underline{E}(z) = \frac{k_e 2Qz}{(2L^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} = \frac{k_e (4 \cdot 10^{-9})z}{(2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad \frac{V}{m} \quad (3)$$

e, come suggerito dalle simmetrie presenti, ha solo una componente diretta secondo l'asse z . L'eventuale punto di massimo si può calcolare determinando i valori di z per cui $\frac{dE_z(z)}{dz} = 0$ e controllando che siano punti di massimo. L'espressione della derivata rispetto a z della componente z del campo elettrostatico è:

$$\frac{dE_z(z)}{dz} = k_e 2Q \frac{(2L^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2 (2L^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(2L^2 + z^2)^3} \quad (4)$$

La derivata si annulla nei punti in cui il numeratore è nullo e cioè per $z = \pm L = \pm 1$ m. Si può verificare dal valore della derivata seconda che il valore $z_{max} = 1$ m è un punto di massimo.

Problema 2 (8 punti) Un condensatore ideale in aria a facce piane parallele circolari di raggio $a = 10$ cm e distanti $d = 6$ mm viene caricato tramite una generatore di forza elettromotrice costante di valore $\Delta V_0 = 51.77$ V. Successivamente una lastra di dielettrico omogeneo, isotropo, lineare di costante dielettrica relativa ϵ_r , anch'esso circolare di raggio a ed altezza $d/3$ viene inserita tra le armature come in figura 3 mentre il generatore rimane collegato. Sapendo che la variazione di carica totale fornita dal generatore a seguito dell'introduzione della lastra dielettrica è $\Delta Q = 0.8 \cdot 10^{-9}$ C, determinare il valore della costante dielettrica ϵ_r della lastra.

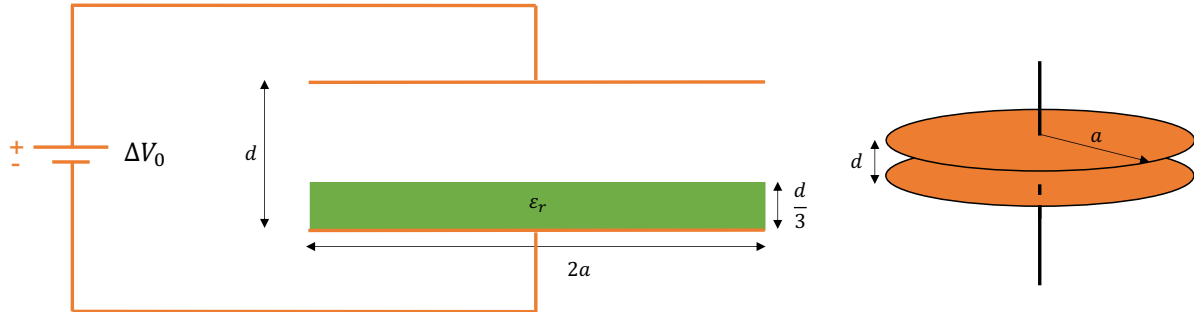


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

La carica iniziale Q_i sulle armature del condensatore piano può essere calcolata ricordando che $Q = C\Delta V$. Si ha quindi:

$$Q_i = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \Delta V_0 \cong 2.4 \text{ nC} \quad (5)$$

Un volta introdotta la struttura la differenza di potenziale tra le armature rimane costante ma la carica sulle armature cambia valore perché cambia la capacità del condensatore. In questo caso il condensatore può essere visto come la serie di due condensatori, di capacità

$$C_d = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r \pi a^2}{d} \cong 556.31 \text{ pF} \quad (6)$$

$$C_a = \frac{3\epsilon_0 \pi a^2}{2d} \cong 69.54 \text{ pF} \quad (7)$$

dove con il pedice d si è indicata la capacità del condensatore con il dielettrico e con a la capacità del condensatore in aria.

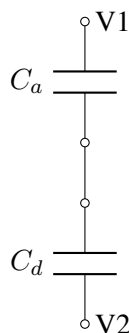


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2 dove $\Delta V_0 = V_1 - V_2$

La capacità totale del condensatore è:

$$C_T = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \frac{3\epsilon_r}{(2\epsilon_r + 1)} \cong 61.81 \text{ pF} \quad (8)$$

La carica finale dopo l'introduzione del dielettrico è

$$Q_f = C_T \Delta V_0 = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \frac{3\epsilon_r}{(2\epsilon_r + 1)} \Delta V_0 \quad (9)$$

$$= Q_i \frac{3\epsilon_r}{(2\epsilon_r + 1)} \cong 3.2 \text{ nC} \quad (10)$$

La variazione di carica totale fornita dal generatore a seguito dell'introduzione della lastra dielettrica è

$$\Delta Q = Q_f - Q_i = \left[\frac{3\epsilon_r}{(2\epsilon_r + 1)} - 1 \right] Q_i \quad (11)$$

$$= \left(\frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r + 1} \right) 2.4 \cong 0.8 \text{ nC} \quad (12)$$

Da questa si ricava che

$$\left(\frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r + 1} \right) = \frac{1}{3} \quad (13)$$

e quindi $\epsilon_r = 4$.

Problema 3 (8 punti) Tre fili conduttori, infinitamente lunghi, sono tra loro paralleli e disposti ai tre vertici di un quadrato di lato $a = 20$ cm, come in figura 4. I fili sono percorsi dalla stessa corrente stazionaria nel tempo $I = 265.9$ A concorde all'asse z . Calcolare la forza che agisce su un tratto di lunghezza unitaria $L = 1$ m del filo posto sull'asse x nel vertice C di figura.

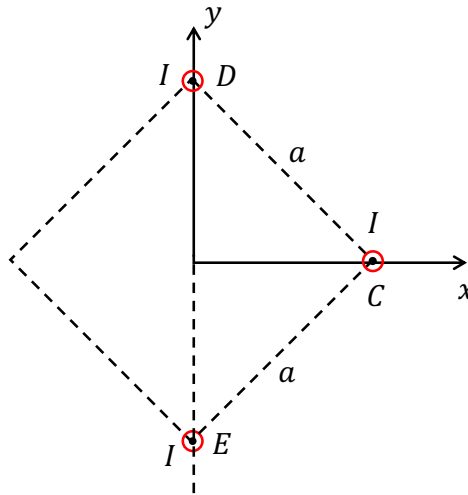


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Ricordiamo prima di tutto che il campo di induzione magnetica $\underline{B}(P)$ generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente stazionaria I su un qualunque punto P di un piano perpendicolare al filo è dato dalla legge di Biot-Savart:

$$\underline{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \hat{t} \quad (14)$$

essendo R il raggio della circonferenza sul piano con centro sul filo e passante per il punto P (vedi figura 5). Il versore $\hat{t} = (\hat{u}_I \times \hat{u}_R)$ è il versore in P tangente alla circonferenza di raggio R , $\hat{u}_I$ è il versore

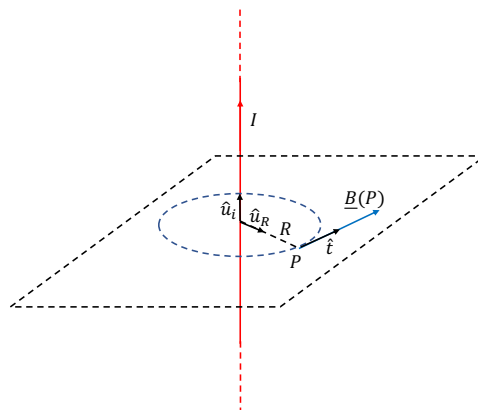


Figura 5: Legge di Biot-Savart

parallelo al filo e concorde con il verso della corrente e $\hat{u}_R$ il versore normale al filo e diretto verso P . Su un tratto generico L del filo infinito rettilineo posto nel vertice C agisce la forza di Lorentz:

$$\underline{F}_L(C) = I \underline{L} \times \underline{B}(C) \quad (15)$$

dove I è la corrente che percorre il filo in C e $\underline{B}(C)$ è il campo di induzione magnetica totale presente in ogni punto di questo filo. Il campo di induzione magnetica totale in ogni punto del filo in C può

essere calcolato mediante il principio di sovrapposizione degli effetti sommando vettorialmente i campi di induzione magnetica generati dai fili posti in D e E . Dalla espressione (14), il contributo all'induzione magnetica in C del filo posto in D è

$$\underline{B}_D(C) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{x} + \hat{y}) \quad (16)$$

mentre il contributo all'induzione magnetica in C del filo posto in E è

$$\underline{B}_E(C) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} (-\hat{x} + \hat{y}) \quad (17)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti (figura 6) l'induzione magnetica totale in C è

$$\underline{B}(C) = \underline{B}_D(C) + \underline{B}_E(C) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \sqrt{2} \hat{y} \cong 3.76 \cdot 10^{-4} \hat{y} \text{ T} \quad (18)$$

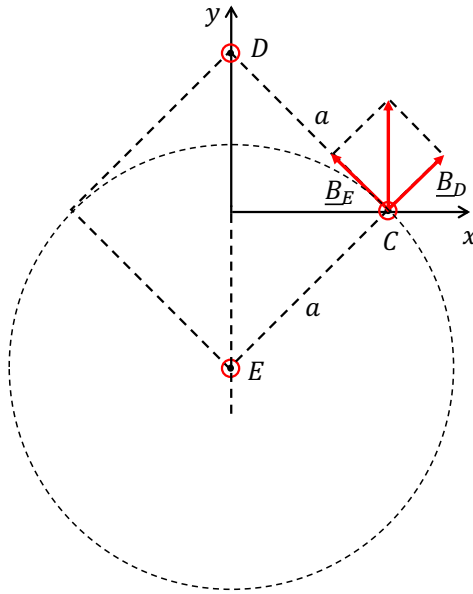


Figura 6: Campo di induzione magnetica totale nel punto C

La forza di Lorentz che agisce su un tratto di lunghezza L è quindi:

$$\underline{F}(C) = IL\hat{z} \times \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \sqrt{2} \hat{y} = -IL \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \sqrt{2} \hat{x} \cong -0.1 \hat{x} \text{ N} \quad (19)$$

Problema 4 (8 punti) Un filo rettilineo infinito indeformabile, percorso da corrente variabile $I_1(t) = -I_1(t)\hat{y}$ giace sull'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Sullo stesso piano $x - y$ giace una spira rettangolare conduttrice indeformabile di lati $a = 10$ cm e $b = 20$ cm, disposta come in figura 7 con il lato parallelo più vicino al filo a distanza $L = 6.49$ cm da questo. Determinare il coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti.

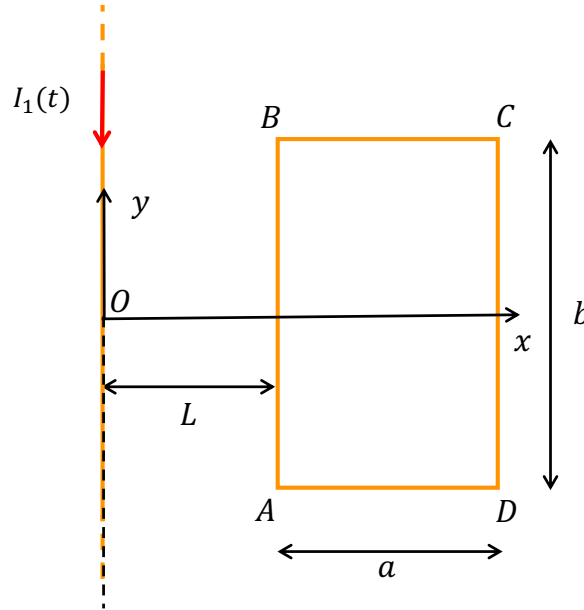


Figura 7: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

L'asse $\hat{z}$ del sistema di riferimento cartesiano è uscente nel foglio. La legge di Biot-Savart afferma che il campo magnetico generato dal filo rettilineo percorso da corrente $I(t)$ in tutti punti sul piano $x - y$ è:

$$\underline{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{|x|} \hat{z} \quad (20)$$

dove $|x|$ è la distanza del punto di osservazione generico $P = (x, y)$ dal filo indefinito. Essendo la spira rettangolare posizionata nella regione $x > 0$, nella (20) si può porre $|x| = x$.

Il flusso magnetico attraverso l'area della spira può essere calcolato come

$$\Phi(\underline{B}) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_L^{L+a} \underline{B}(x) \cdot \hat{z} dx dy \quad (21)$$

Sostituendo l'espressione (20) si ottiene:

$$\Phi(\underline{B}) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_L^{L+a} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1(t)}{x} \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy = \frac{\mu_0 I_1(t) b}{2\pi} \int_L^{L+a} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I_1(t) b}{2\pi} \ln \left[\frac{(L+a)}{L} \right] \quad (22)$$

Essendo i circuiti indeformabili si ottiene:

$$M = \frac{d\Phi(\underline{B})}{dI_1(t)} = \frac{\Phi(\underline{B})}{I_1(t)} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left[\frac{(L+a)}{L} \right] \cong 3.73 \cdot 10^{-8} \text{ H} \quad (23)$$