

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

31 Gennaio 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Un nastro isolante, di spessore infinitesimo, è piegato a forma di corona semi-circolare, ed è posto sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano con centro nell'origine (vedi figura 1). I raggi interno ed esterno del nastro sono rispettivamente $a = 5 \text{ cm}$ e $b = 2a$. Sul nastro è distribuita una densità superficiale di carica non uniforme $\sigma(\rho) = \gamma\rho \text{ C/m}^2$ dove ρ è la distanza radiale dal centro sul piano xy e $\gamma = 222.53 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3$ una costante. Determinare

- Modulo, direzione e verso della forza elettrica che subisce una carica puntiforme di valore $q = 10^{-6} \text{ C}$ quando si trova nell'origine del sistema di riferimento;
- il valore del potenziale elettrostatico nell'origine.

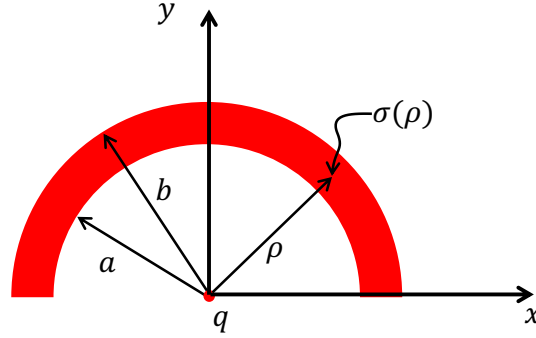


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Consideriamo il sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) associato al sistema di riferimento cartesiano. Un generico punto sorgente sul nastro carico può essere univocamente determinato dal vettore posizione $\underline{r}' = \rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y}$. L'areola elementare posta in $\underline{r}'$ espressa in coordinate cilindriche è $ds' = \rho' d\rho' d\phi'$. A questa areola è associata una carica puntiforme

$$dq'(\underline{r}') = \gamma \rho' ds' = \gamma (\rho')^2 d\rho' d\phi' \quad (1)$$

dove $a < \rho' < b$ e $0 < \phi' < \pi$. Il campo elettrostatico elementare generato dalla carica puntiforme dq' in un punto di osservazione generico $\underline{r}$ è

$$d\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') \quad (2)$$

Se il punto di osservazione si trova nell'origine $\underline{r} = 0$, $(\underline{r} - \underline{r}') = -(\rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y})$ e $|\underline{r} - \underline{r}'| = \rho'$. Il campo totale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica superficiale nell'origine è quindi:

$$\underline{E}(0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^\pi \frac{\gamma (\rho')^2 d\rho' d\phi' (\rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y})}{(\rho')^3} \quad (3)$$

$$= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^\pi (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) d\rho' d\phi' \quad (4)$$

Si osservi che l'integrazione della componente del campo elettrostatico diretta lungo x si annulla, come era logico attendersi dalla simmetria del problema. L'integrazione della componente lungo y da luogo al campo:

$$\underline{E}(0) = -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^\pi (\sin \phi' \hat{y}) d\rho' d\phi' = -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} 2(2a - a) \hat{y} \quad (5)$$

$$= -\frac{\gamma a}{2\pi\epsilon_0} \hat{y} \cong -200 \hat{y} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (6)$$

La forza che agisce sulla carica q è quindi:

$$\underline{F} = \underline{E}(0)q = -\frac{\gamma a q}{2\pi\epsilon_0} \hat{y} \cong -2 \cdot 10^{-4} \hat{y} \quad \text{N} \quad (7)$$

Il potenziale elettrostatico elementare generato nell'origine dalla carica puntiforme $dq'(r')$ è:

$$dV(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{\rho'} \quad (8)$$

per cui il potenziale totale è

$$V(0) = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^\pi \rho' d\rho' d\phi' = \frac{\gamma\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{(b^2 - a^2)}{2} \quad (9)$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\gamma a^2}{\epsilon_0} \cong 23.56 \quad \text{V} \quad (10)$$

Problema 2 (8 punti) Un sistema di condensatori cilindrici a sezione circolare, ideali, in aria, di altezza L è costituito da un'armatura interna cilindrica interna di raggio a , e da due armature cilindriche coassiali a questa (vedi figura 2). I raggi interno ed esterno dell'armatura metallica mediana misurano rispettivamente $2a$ e $3a$ mentre i raggi interno ed esterno dell'armatura metallica più esterna misurano rispettivamente $6a$ e $7a$. In una prima fase l'armatura più interna e quella esterna sono connesse ad un generatore che carica il sistema fino a raggiungere una differenza di potenziale ΔV_0^i V, e quindi isolato. In una seconda fase, l'intercapedine in aria tra l'armatura mediana e quella esterna viene completamente riempita di materiale dielettrico, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r . Indicato con ΔV_0^f la differenza di potenziale tra l'armatura interna e quella esterna al termine della seconda fase, si calcoli il valore della costante dielettrica relativa in modo che $(\Delta V_0^f / \Delta V_0^i) = (2/3)$.

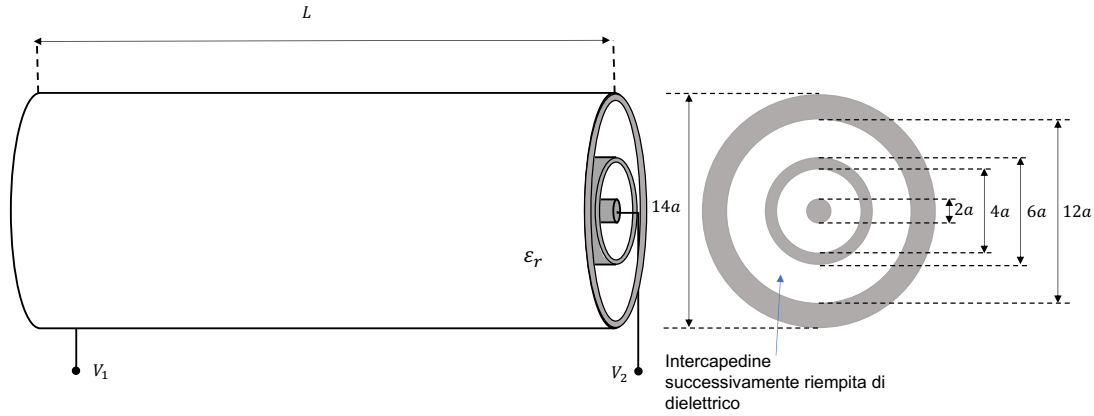


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2 Nella prima fase il sistema di condensatori è equivalente a due condensatori cilindrici collegati in serie di capacità rispettivamente:

$$C_1^a = \frac{\epsilon_0 2\pi L}{\ln\left(\frac{2a}{a}\right)} = \frac{\epsilon_0 2\pi L}{\ln(2)} \quad (11)$$

$$C_1^b = \frac{\epsilon_0 2\pi L}{\ln\left(\frac{6a}{3a}\right)} = \frac{\epsilon_0 2\pi L}{\ln(2)} = C_1^a = C_1 \quad (12)$$

La capacità totale di due condensatori in serie di uguale valore è pari alla metà della capacità dei singoli condensatori:

$$C_1^t = \frac{C_1 C_1}{C_1 + C_1} = \frac{C_1}{2} \quad (13)$$

La carica totale del condensatore isolato in questa prima fase è

$$Q_1 = C_1^t \Delta V_0^i = \frac{C_1}{2} \Delta V_0^i \quad (14)$$

Alla fine della seconda fase il sistema di condensatori è equivalente a due condensatori cilindrici collegati in serie di capacità rispettivamente::

$$C_2^a = \frac{\epsilon_0 2\pi L}{\ln(2)} = C_1 \quad (15)$$

$$C_2^b = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r 2\pi L}{\ln\left(\frac{6a}{3a}\right)} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r 2\pi L}{\ln(2)} = \epsilon_r C_1 \quad (16)$$

In questa seconda fase la capacità totale dei due condensatori in serie è

$$C_2^t = \frac{\epsilon_r C_1 C_1}{\epsilon_r C_1 + C_1} = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \right) C_1 \quad (17)$$

La carica totale del condensatore isolato al termine di questa seconda fase è:

$$Q_2 = C_2^t \Delta V_0^f = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \right) \Delta V_0^f \quad (18)$$

In un sistema isolato la carica si conserva, cioè $Q_1 = Q_2$, per cui possiamo scrivere

$$C_1^t \Delta V_0^i = C_2^t \Delta V_0^f \quad (19)$$

da cui si ricava

$$\frac{\Delta V_0^f}{\Delta V_0^i} = \frac{C_1^t}{C_2^t} = \frac{C_1}{2} \left(\frac{\epsilon_r + 1}{\epsilon_r} \right) \frac{1}{C_1} = \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r} \right) = \frac{2}{3} \quad (20)$$

Risolvendo si ottiene $\epsilon_r = 3$.

Problema 3 (8 punti) Nel vuoto, un conduttore cilindrico di raggio a , idealmente infinito ed asse di simmetria coincidente con l'asse z di un sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) con centro sull'asse, è percorso da una densità di corrente di conduzione stazionaria non uniforme $\underline{J}(\rho) = \alpha \rho \hat{z}$ [A/m²], dove ρ indica la distanza dall'asse del cilindro ed α [A/m³] una costante (vedi figura 3). Calcolare l'espressione del vettore campo magnetico in funzione della distanza dall'asse, sia internamente che esternamente al conduttore.

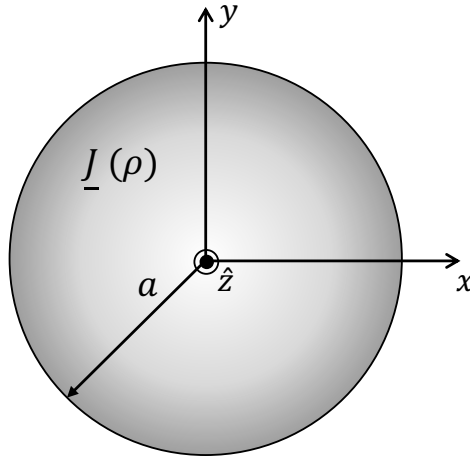


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il teorema della circuitazione di Ampere afferma che la circuitazione del campo magnetico lungo il cammino chiuso orientato Γ che costituisce il bordo di una superficie aperta S dipende solo dalle correnti di conduzione (anche in presenza di materiali magnetizzati):

$$\oint_{\Gamma} \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}') \cdot \hat{n} ds' \quad (21)$$

Data la natura bidimensionale del problema, consideriamo un sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) come in figura 4.

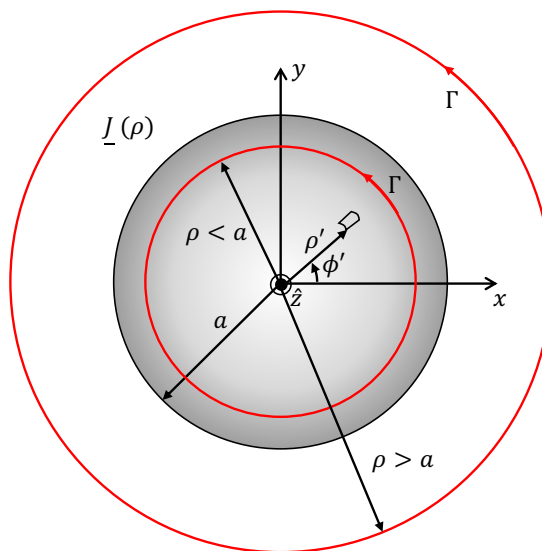


Figura 4: Geometria del problema 3

Poichè la corrente non uniforme è costante per $\rho=\text{costante}$, il problema conserva ancora una simmetria circolare (indipendente da ϕ quando $\rho=\text{costante}$).

$\rho > a$ In questo caso il punto di osservazione generico $P = (\rho, \phi)$ si trova all'esterno del conduttore. Consideriamo quindi un cammino circolare Γ di raggio ρ con centro nell'origine, orientato come in figura (4). Data la simmetria circolare, il campo magnetico $\underline{H}$ in tutti punti del cammino è costante in modulo e diretto tangenzialmente alla circonferenza Γ . Rispetto al sistema di riferimento cilindrico il campo magnetico è esprimibile come

$$\underline{H}(\rho, \phi) = H_\phi(\rho) \hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (22)$$

Applicando il teorema della circuitazione di Ampere (21) e tenendo conto del verso della densità di corrente si ha:

$$H_\phi(\rho) 2\pi\rho = \iint_S \alpha \rho' \hat{z} \cdot \hat{z} ds' \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (23)$$

dove con (ρ', ϕ') indica il generico punto sorgente sulla superficie del conduttore interessato dalla densità di corrente. In coordinate cilindriche, l'areola elementare nel punto (ρ', ϕ') è $ds' = \rho' d\rho' d\phi'$ per cui l'integrale di flusso a destra della (23) diventa

$$\iint_S \alpha \rho' \hat{z} \cdot \hat{z} ds' = \alpha \int_0^a \int_0^{2\pi} (\rho')^2 d\rho' d\phi' = 2\pi\alpha \frac{a^3}{3} \quad (24)$$

Sostituendo la precedente nella (23) si ottiene

$$\underline{H}(\rho) = \frac{\alpha a^3}{3\rho} \hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (25)$$

$\rho < a$ In questo caso il punto di osservazione generico $P = (\rho, \phi)$ si trova all'interno del conduttore. Consideriamo anche in questo caso un cammino circolare Γ di raggio ρ con centro nell'origine, orientato come in figura (4). Data la simmetria circolare, il campo magnetico $\underline{H}$ è ancora esprimibile come

$$\underline{H}(\rho, \phi) = H_\phi(\rho) \hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (26)$$

Nell'applicazione del teorema della circuitazione di Ampere (21) si deve tenere conto che la superficie S su cui si appoggia il contorno Γ adesso si estende fino a ρ , per cui si ottiene:

$$H_\phi(\rho) 2\pi\rho = \alpha \int_0^\rho \int_0^{2\pi} (\rho')^2 d\rho' d\phi' = 2\pi\alpha \frac{\rho^3}{3} \quad (27)$$

da cui infine

$$\underline{H}(\rho) = \frac{\alpha \rho^2}{3} \hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (28)$$

Problema 4 (8 punti) Una bobina, lunga $l_1 = 0.3$ m, è costituita da $n_1 = 300$ spire compatte, avvolte attorno ad un cilindro di materiale lineare, omogeneo, isotropo, a sezione circolare, molto lungo, di raggio $r = 2$ cm e permeabilità magnetica $\mu = 1850\mu_0$. Sullo stesso nucleo di materiale è avvolta, concentrica alla prima e in posizione centrale, una seconda bobina lunga $l_2 = 0.2$ m costituita da $n_2 = 206$ spire (vedi figura 5). Trascurando il diametro del filo conduttore delle due bobine, determinare il coefficiente di mutua induttanza M fra queste. Supponendo che la corrente nella prima bobina diminuisca linearmente da $I_1^a = 15$ A a $I_1^b = 0$ A in $\Delta t = 60.18$ ms, determinare il modulo della forza elettromotrice indotta nella seconda bobina.

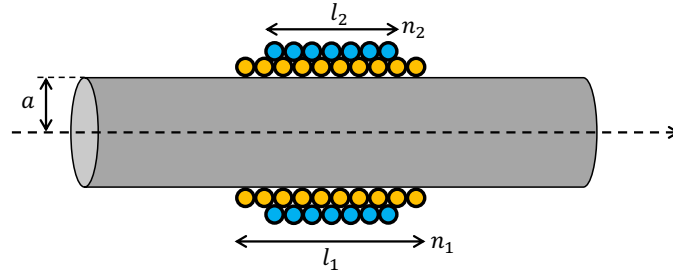


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

Il sistema ha simmetria cilindrica, e dunque anche il campo magnetico prodotto dalle bobine deve avere simmetria cilindrica. Considerazioni su questa simmetria e sul fatto che il nucleo sia ad alta permeabilità consentono di porsi nelle condizioni di solenoide infinitamente lungo, all'interno delle due bobine. Per quanto riguarda i punti al di fuori delle bobine di lunghezza finita, ricordiamo che il campo magnetico è praticamente trascurabile¹. Ricapitolando, il campo magnetico $\underline{H}$ è nullo esternamente alle bobine, mentre internamente ad esse è uniforme su tutti punti del nucleo e diretto secondo l'asse del cilindro. Supponiamo quindi che sulla bobina 1 scorra una corrente variabile nel tempo $I_1(t)$. In condizioni quasi stazionarie sappiamo dal teorema della circuitazione di Ampere che internamente alla bobina si ha un campo magnetico uniforme, diretto come l'asse del cilindro, di modulo:

$$|\underline{H}_1(t)| = \frac{n_1}{l_1} I_1(t) \quad (29)$$

Corrispondentemente si avrà un campo di induzione magnetica uniforme di modulo:

$$|\underline{B}_1(t)| = |\mu_0 \mu_r \underline{H}_1(t)| = \mu_0 \mu_r \frac{n_1}{l_1} I_1(t) \quad (30)$$

La bobina 2 ha dimensione più piccola della bobina 1 per cui il flusso prodotto dalla bobina 1 si concatenerà con tutte le n_2 spire della bobina 2². Poiché la direzione del campo di induzione è perpendicolare alla sezione del nucleo, il flusso di induzione magnetica attraverso le n_2 spire della bobina 2 sarà

$$\Phi_{21} [\underline{B}_1(t)] = \mu_0 \mu_r \frac{n_1}{l_1} I_1(t) n_2 \pi a^2 \quad (31)$$

Il coefficiente di mutua induzione è quindi:

$$M_{21} = M = \frac{\Phi_{21} [\underline{B}_1(t)]}{I_1(t)} = \mu_0 \mu_r \frac{n_1 n_2}{l_1} \pi a^2 \cong 0.6018 \quad \text{H} \quad (32)$$

¹cfr. Esempio E.5.12 del libro di testo Mencuccini C., Silvestrini V., "Fisica - Elettromagnetismo e ottica" - Casa Editrice Ambrosiana.

²Se ipotizziamo che sia la bobina 2 ad essere percorsa da una corrente $I_2(t)$, il flusso di induzione magnetica prodotto da questa si concatenerà solo con $\frac{n_1}{l_1} l_2$ spire della bobina 1 perché al di fuori della bobina 2 il campo prodotto è approssimativamente nullo.

La legge di variazione della corrente è data da

$$I_1(t) = I_1^a - \frac{I_1^a}{\Delta t} t \quad (33)$$

Applicando la legge dell'induzione elettromagnetica, il modulo della forza elettromotrice indotta nella bobina 2 durante la variazione della corrente è

$$|\mathcal{E}_i| = \left| -M \frac{dI_1(t)}{dt} \right| = \mu_0 \mu_r \frac{n_1 n_2}{l_1} \pi a^2 \frac{I_1^a}{\Delta t} \cong 150 \text{ V} \quad (34)$$