

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

19 Febbraio 2021.

Problema 1 (8 punti) Un guscio conduttore sferico di raggio interno $b = 3a$ e raggio esterno $c = 2b$ ha una carica pari a Q_2 . Nella cavità di aria interna del guscio è presente una sfera conduttrice, concentrica al guscio, di raggio $a = 3 \text{ cm}$ con un'ulteriore carica $Q_1 = -Q_2/3$. Ad una distanza $d = 100a$ dal centro dei due conduttori si misura una campo elettrostatico di intensità $|\underline{E}(d)| = 2 \text{ kV/m}$. Determinare:

- il vettore campo elettrostatico in un punto generico all'interno della cavità $a < r < b$;
- il valore della energia elettrostatica immagazzinata all'interno della cavità.

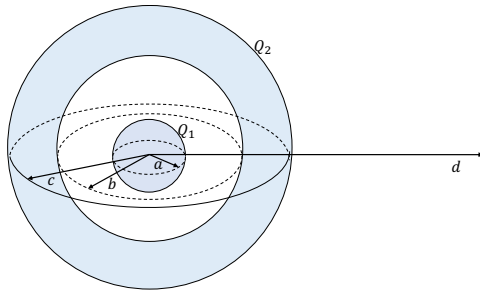


Figura 1: Geometria del problema 1

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Soluzione del problema 1

a)

Il campo elettrostatico a distanza d dal sistema dei conduttori può essere calcolato utilizzando il teorema di Gauss e si ottiene:

$$\underline{E}(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{tot}}{d^2} \hat{r} = k_e \frac{Q_{tot}}{d^2} \hat{r} \quad (1)$$

Coincide quindi con il campo elettrico di una carica puntiforme posta nel centro delle sfere di valore $Q_{tot} = Q_1 + Q_2$ Per la

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = -\frac{Q_2}{3} + Q_2 = Q_2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} Q_2 \quad (2)$$

Poiché a distanza d l'intensità del campo è nota e vale $|\underline{E}(d)| = 2 \text{ kV/m}$, si può calcolare la carica Q_2 come segue:

$$k_e \frac{2Q_2}{3d^2} = |\underline{E}(d)| \quad (3)$$

da cui,

$$Q_2 = \frac{3}{2} 4\pi\epsilon_0 |\underline{E}(d)| d^2 = 6\pi\epsilon_0 |\underline{E}(d)| d^2 \quad (4)$$

Sostituendo i valori

$$Q_2 \cong (18.85) \cdot (8.85 \cdot 10^{-12}) \cdot (2 \cdot 10^3) \cdot (9) \cong 3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \quad (5)$$

Segue quindi che $Q_1 = -1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

Applicando quindi il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $a < r < b$ si ottiene

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} = k_e \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} = -\frac{9000}{r^2} \hat{r} \text{ V/m} \quad (6)$$

b)

Procedimento b_1)

Poichè siamo in aria, la densità volumetrica di energia in ogni punto dell'intercapedine vuota è

$$w(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\underline{E}(r)|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 k_e^2 \frac{Q_1^2}{r^4} = \frac{3.58 \cdot 10^4}{r^4} \frac{J}{m^3} \quad (7)$$

Integrando sul volume compreso tra la sfera interna e la superficie interna del guscio sferico si ha:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 k_e^2 Q_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 k_e^2 Q_1^2 4\pi \int_a^b \frac{1}{r^2} dr \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 k_e^2 Q_1^2 4\pi \left[\frac{1}{r} \right]_b^a \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 k_e^2 Q_1^2 4\pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 k_e^2 Q_1^2 4\pi \left(\frac{b-a}{ab} \right) \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 k_e^2 Q_1^2 4\pi \left(\frac{2}{3a} \right) = \frac{\epsilon_0 k_e^2 Q_1^2 4\pi}{3a} = 0.1 J \quad (12)$$

Procedimento b_2)

Per induzione completa sulla faccia interna del guscio si induce la carica $-Q_1 = 1 \cdot 10^{-6} C$. Il sistema può essere considerato equivalente ad un condensatore sferico con carica $|Q_1|$ con armature la superficie della sfera interna e la superficie interna del guscio. L'energia potenziale immagazzinata nel condensatore è quindi

$$W_e = \frac{1}{2} |Q_1| \Delta V. \quad (13)$$

La differenza di potenziale si calcola integrando lungo una linea radiale da a a b il campo elettrostatico determinato al punto a).

$$V_b - V_a = - \int_a^b k_e \frac{Q_1}{r^2} dr = -k_e Q_1 \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = k_e Q_1 \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] \quad (14)$$

$$= k_e Q_1 \left[\frac{a-b}{ba} \right] = -k_e Q_1 \frac{2}{3a} \quad (15)$$

$$\cong -9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-6}) \cdot (22.22) \cong 2 \cdot 10^5 V \quad (16)$$

L'energia potenziale è quindi

$$W_e = \frac{1}{2} |Q_1| \Delta V = \frac{1}{2} \cdot (10^{-6}) \cdot (2 \cdot 10^5) = 0.1 J \quad (17)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore piano, ideale, in aria di superficie quadrata di lato a e distanza tra le armature d viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale tra le due armature di $\Delta V_0 = V_1 - V_2$ [V], e quindi isolato. Successivamente viene introdotta una struttura a forma di parallelepipedo con la superficie della stessa forma e dimensione di quella del condensatore. La struttura è costituita da due strati di materiale dielettrico di altezza h separati da una lamina di conduttore piano di spessore trascurabile. Il primo dielettrico, di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r1} = 3$, occupa il volume $b \times a \times h$ sopra la lamina mentre la parte rimanente, di volume $c \times a \times h$ rimane in aria. Il secondo dielettrico, di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r2} = 2$, occupa il volume $c \times a \times h$ sotto la lamina mentre la parte rimanente, di volume $b \times a \times h$ rimane in aria (vedi figura). Nell'ipotesi che $b + c = a$, $d = 2h$, e che $a = 3b$:

- determinare il rapporto numerico tra la differenza di potenziale ΔV_N tra le armature del condensatore dopo l'introduzione della struttura, e la differenza di potenziale iniziale ΔV_0 ;
- considerata la lamina posta a distanza h dalle armature del condensatore, calcolare nella regione al di sotto di essa l'intensità del campo elettrostatico nella zona in aria e in quella di dielettrico, nell'ipotesi che valga $\Delta V_0 = 1000V$ ed $h = 5 \text{ mm}$.

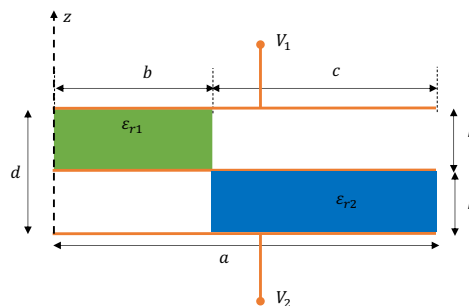


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

La carica iniziale Q sulle armature del condensatore piano può essere calcolata ricordando che $Q = C\Delta V$. Si ha quindi:

$$Q = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \Delta V_0 \quad (18)$$

Un volta introdotta la struttura la carica rimane invariata perché il condensatore viene isolato. La nuova differenza di potenziale che si stabilisce tra le armature dipende dalla capacità del condensatore dopo l'introduzione della struttura. In questo caso il condensatore può essere visto come la serie di due condensatori, ognuno dei quali può essere visto come il parallelo di due condensatori (vedi figura). Le capacità dei singoli condensatori sono

$$C_1^b = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} ab}{h} = \frac{\epsilon_0 3ab}{h} \quad (19)$$

$$C_1^c = \frac{\epsilon_0 ac}{h} = \frac{\epsilon_0 2ab}{h} \quad (20)$$

$$C_2^b = \frac{\epsilon_0 ab}{h} \quad (21)$$

$$C_2^c = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} ac}{h} = \frac{\epsilon_0 4ab}{h} \quad (22)$$

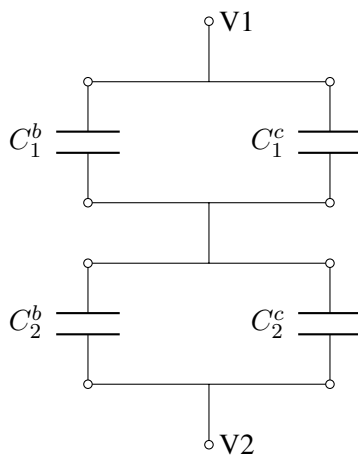


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

La capacità totale di due condensatori in parallelo è la somma delle capacità per cui si ha:

$$C_1 = C_1^b + C_1^c = \frac{\epsilon_0 3ab}{h} + \frac{\epsilon_0 2ab}{h} = \frac{\epsilon_0 5ab}{h} \quad (23)$$

$$C_2 = C_2^b + C_2^c = \frac{\epsilon_0 ab}{h} + \frac{\epsilon_0 4ab}{h} = \frac{\epsilon_0 5ab}{h} \quad (24)$$

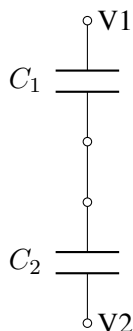


Figura 4: Circuito equivalente del problema 2

quindi

$$C_1 = C_2 = C = \frac{\epsilon_0 5ab}{h} \quad (25)$$

La capacità totale delle due capacità C_1 e C_2 in serie è:

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2} = \frac{\epsilon_0 5ab}{2h} \quad (26)$$

La differenza di potenziale ΔV_N nella nuova configurazione è

$$\Delta V_N = \frac{Q}{C_T} = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \Delta V \cdot \frac{2h}{\epsilon_0 5ab} \quad (27)$$

Essendo per ipotesi $d = 2h$ e $b = a/3$

$$\Delta V_N = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \Delta V \cdot \frac{3d}{\epsilon_0 5a^2} = \frac{3}{5} \Delta V_0 \quad (28)$$

E quindi il rapporto numerico è $3/5$.

b)

Se indichiamo con ΔV_{1N} la differenza di potenziale tra l'armatura a potenziale V_1 e la lamina centrale e con ΔV_{2N} la differenza di potenziale tra la lamina centrale e l'armatura a potenziale V_2 , la differenza di potenziale totale è

$$\Delta V_N = \Delta V_{1N} + \Delta V_{2N} = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C} \quad (29)$$

Si ha quindi

$$\Delta V_{2N} = \frac{Q}{C} = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \Delta V_0 \cdot \frac{h}{\epsilon_0 5ab} = \frac{\epsilon_0 a^2}{2h} \Delta V_0 \cdot \frac{3h}{\epsilon_0 5a^2} = \frac{3}{10} \Delta V_0 \quad (30)$$

Se indichiamo con E_2^b l'intensità del campo elettrico nella parte in aria e con E_2^c l'intensità del campo elettrico nella parte di dielettrico, essendo entrambi perpendicolari alle armature per la continuità della componente tangente del campo elettrico attraversando l'interfaccia si ha:

$$E_2^a = E_2^b = \frac{\Delta V_{2N}}{h} = \frac{3}{10} \frac{\Delta V_0}{h} = 60 \frac{kV}{m} \quad (31)$$

Problema 3 (8 punti) Una spira quadrata di lato $2l$, percorsa in senso antiorario da una corrente stazionaria I_s , giace sul piano $x - z$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con centro nell'origine. Due fili rettilinei infiniti, percorsi da corrente stazionaria $\underline{I}_1 = I_1 \hat{z}$ e $\underline{I}_2 = -I_2 \hat{z}$ giacciono sullo stesso piano della spira, posizionati in $x_1 = -d_1 \hat{x}$ e $x_2 = d_2 \hat{x}$. Nell'ipotesi che $d_2 = \sqrt{3d_1^2 - 2l^2}$ determinare:

- il valore della corrente I_2 in modo tale che la risultante delle forze che agisce sulla spira sia nulla;
- il valore della distanza d_2 in modo che l'intensità del vettore induzione magnetica nell'origine del sistema di riferimento dovuto dalle sole correnti dei fili rettilinei infiniti determinate al punto (a), sia $|\underline{B}(0)| = 160 \mu T$, quando $I_1 = 100 A$ e $d_1 = 50 cm$.

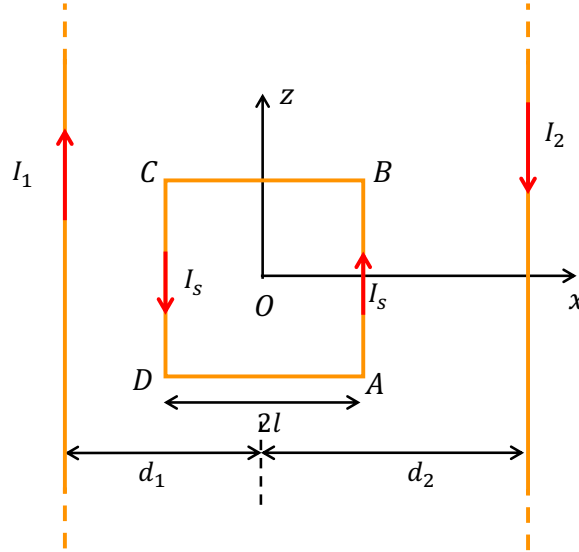


Figura 5: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

a)

Consideriamo l'asse $\hat{y}$ entrante nel foglio. La legge di Biot-Savart afferma che il campo magnetico generato dal filo rettilineo percorso da corrente I_1 in tutti punti sul piano $x - z$ è:

$$\underline{B}_1(x, z) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \hat{y} \quad (32)$$

dove $r_1 = |x + d_1|$ è la distanza del punto di osservazione dal filo con $x > -d_1$. Analogamente, il campo magnetico generato dal filo rettilineo percorso da corrente I_2 in tutti punti sul piano $x - z$ è:

$$\underline{B}_2(x, z) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \hat{y} \quad (33)$$

dove $r_2 = |x - d_2|$ è la distanza del punto di osservazione dal filo con $x < d_2$. La forza magnetica elementare agente su un tratto elementare $d\underline{l}(\underline{r}')$ di filo percorso da corrente I_s è:

$$d\underline{F}(\underline{r}') = I_s d\underline{l}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}') \quad (34)$$

Sui tratti $\underline{BC}$ e $\underline{DA}$ il campo magnetico non è costante per cui la forza totale agente sui singoli tratti dovrebbe essere ottenuta integrando lungo il cammino la (34). D'altra parte, per ragioni di simmetria, sempre utilizzando la (34) è facile dimostrare che la somma delle due forze elementari agenti sui due

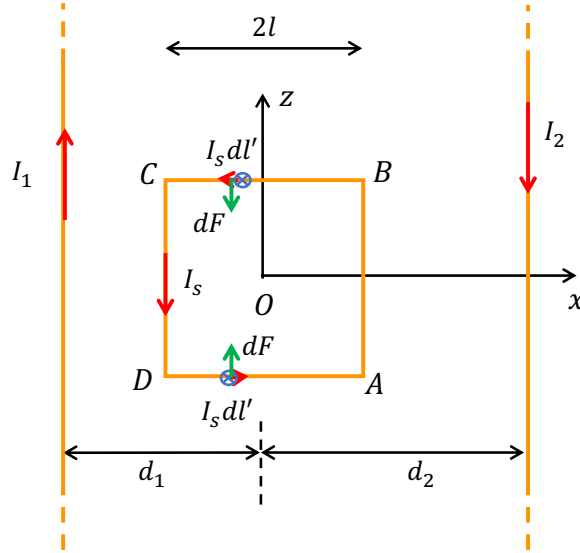


Figura 6: Geometria del problema 3

tratti $d\mathbf{l}'$ simmetrici rispetto all'asse y , posti sui lati $\underline{BC}$ e $\underline{DA}$ e dovute al campo magnetico generato da un singolo filo rettilineo è nulla (vedi Figura 6).

Ne consegue che gli unici tratti che contribuiscono alla risultante sono i tratti $\underline{AB}$ e $\underline{CD}$. Su questi tratti il campo magnetico generato dai due fili è uniforme perchè tutti i punti si trovano alla stessa distanza dai fili rettilinei. La forza magnetica agente su questi tratti può essere scritta come:

$$\underline{F}(a_i) = I_s \underline{L} \times \underline{B}(a_i) \quad (35)$$

dove a_i con $i = 1, 2$ indica la distanza del lato orientato della spira $\underline{L}$ dal filo rettilineo percorso da corrente I_1 e I_2 , rispettivamente. Per il filo rettilineo percorso da corrente I_1 si ha:

$$\underline{F}_{AB}^1 = I_s 2l \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d_1 + l)} \hat{y} = -\frac{\mu_0 I_1 I_s 2l}{2\pi(d_1 + l)} \hat{x} \quad (36)$$

$$\underline{F}_{CD}^1 = I_s 2l(-\hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d_1 - l)} \hat{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_s 2l}{2\pi(d_1 - l)} \hat{x} \quad (37)$$

Per il filo rettilineo percorso da corrente I_2 si ha:

$$\underline{F}_{AB}^2 = I_s 2l \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d_2 - l)} \hat{y} = -\frac{\mu_0 I_2 I_s 2l}{2\pi(d_2 - l)} \hat{x} \quad (38)$$

$$\underline{F}_{CD}^2 = I_s 2l(-\hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d_2 + l)} \hat{y} = \frac{\mu_0 I_2 I_s 2l}{2\pi(d_2 + l)} \hat{x} \quad (39)$$

La risultante delle forze è

$$\underline{R} = \underline{F}_{AB}^1 + \underline{F}_{CD}^1 + \underline{F}_{AB}^2 + \underline{F}_{CD}^2 \quad (40)$$

$$= \left[-\frac{\mu_0 I_1 I_s 2l}{2\pi(d_1 + l)} + \frac{\mu_0 I_1 I_s 2l}{2\pi(d_1 - l)} - \frac{\mu_0 I_2 I_s 2l}{2\pi(d_2 - l)} + \frac{\mu_0 I_2 I_s 2l}{2\pi(d_2 + l)} \right] \hat{x} \quad (41)$$

Ponendo $\underline{R} = 0$ si ottiene:

$$\frac{\mu_0 I_s 2l}{2\pi} \left[-\frac{I_1}{(d_1 + l)} + \frac{I_1}{(d_1 - l)} - \frac{I_2}{(d_2 - l)} + \frac{I_2}{(d_2 + l)} \right] = 0 \quad (42)$$

da cui:

$$\frac{I_1}{(d_1 - l)} - \frac{I_1}{(d_1 + l)} + \frac{I_2}{(d_2 + l)} - \frac{I_2}{(d_2 - l)} = 0 \quad (43)$$

Svolgendo i calcoli:

$$\frac{I_1 2l}{(d_1^2 - l^2)} = \frac{I_2 2l}{(d_2^2 - l^2)} \quad (44)$$

Sostituendo $d_2 = \sqrt{3d_1^2 - 3l^2}$, cioè $d_2^2 = 3d_1^2 - 3l^2$, si ottiene:

$$\frac{I_1}{(d_1^2 - l^2)} = \frac{I_2}{3(d_1^2 - l^2)} \quad (45)$$

e quindi $I_2 = 3I_1$.

b)

Con i valori trovati si ha

$$\underline{B}(0) = \underline{B}_1(0) + \underline{B}_2(0) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d_1)} \hat{y} + \frac{\mu_0 3I_1}{2\pi(d_2)} \hat{y} \quad (46)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left[\frac{1}{d_1} + \frac{3}{d_2} \right] \hat{y} = 160 \hat{y} \mu T \quad (47)$$

da cui:

$$\left[\frac{1}{d_1} + \frac{3}{d_2} \right] = \frac{2\pi}{\mu_0 I_1} 160 \cdot 10^{-6} \quad (48)$$

svolgendo i calcoli:

$$\frac{3}{d_2} = \frac{2\pi}{\mu_0 I_1} 160 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{d_1} \quad (49)$$

$$= \frac{160 \cdot 10^{-6}}{200 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{0.5} \quad (50)$$

$$= \frac{1600}{200} - 2 = 6 \quad (51)$$

Risulta quindi $d_2 = 0.5 \text{ m}$

Problema 4 (8 punti) Una spira rettangolare di altezza $2l$ e larghezza $l = 1\text{ m}$, giace nel piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale ed è disposta come in figura. La spira trasla a velocità costante $v_0 = 12\text{ m/s}$ nel verso positivo dell'asse x . All'istante $t = 0$, entra in una regione profonda $h = 0.2\text{ m}$, in cui è presente un campo magnetico uniforme $\underline{B} = 6\hat{z}\text{ T}$, ortogonale alla spira. La spira attraversa completamente la regione ed esce. Determinare

- l'intensità e il verso della corrente indotta nella spira mentre questa entra nella regione, se la resistenza della spira è $R = 40\ \Omega$
- Il lavoro fatto dalla forza meccanica che trascina la spira quando questa sta uscendo dalla regione di campo magnetico uniforme.

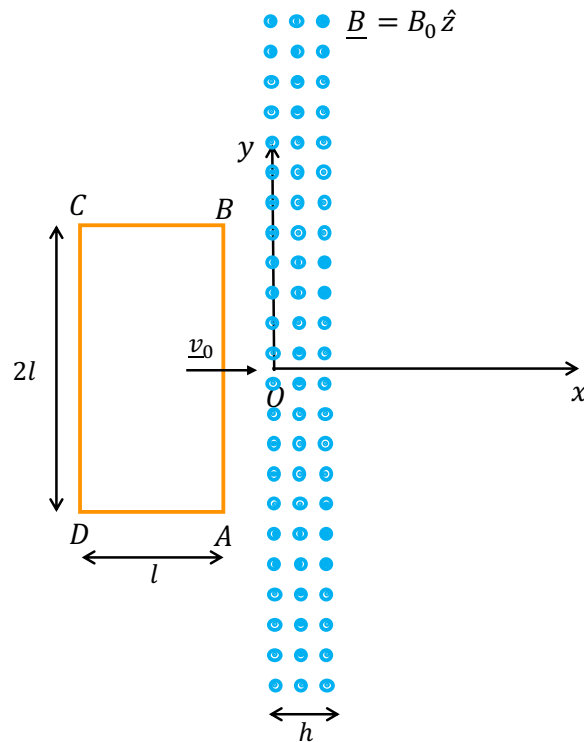


Figura 7: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

a)

Se ci riferiamo alla posizione $x(t)$ del tratto $\underline{AB}$ nel tempo, questa è $x(t) = x(t_0) + v_0 t$. Al tempo $t = 0$ la posizione iniziale è $x(0) = x(t_0) = 0$ per cui la posizione x al tempo t è $x(t) = v_0 t$. Il flusso tagliato dalla spira durante il moto, fino all'istante $t = h$ quando il tratto $\underline{AB}$ non si trova nella posizione $x = h$, è

$$\Phi(t) = B_0 \hat{z} \cdot \hat{z} [2lx(t)] = B_0 2lv_0 t \quad (52)$$

durante questo intervallo di tempo la variazione di flusso è

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = B_0 2lv_0 \quad (53)$$

per cui la tensione indotta è, secondo la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B_0 2lv_0 = -144\text{ V} \quad (54)$$

L'intensità della corrente indotta è

$$I_i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{B_0 2l v_0}{R} = 3.6 \text{ A} \quad (55)$$

Poiché il flusso sta aumentando la corrente indotta dovrà generare un campo magnetico diretto secondo $-\hat{z}$ e quindi circolerà in senso orario rispetto alla normale $\hat{z}$.

b)

Quando la spira esce, si ha la stessa variazione del flusso nel tempo per cui l'intensità della corrente indotta sarà la stessa. La corrente circolerà però in senso antiorario perchè il flusso tende a diminuire. Sul tratto $\underline{CD}$, quando questo percorre la zona di campo magnetico, avremo una corrente I_i diretta secondo $-\hat{y}$. La forza magnetica che agisce sulla spira dovuta a questa corrente indotta è

$$\underline{F}_{CD} = I_i 2l (-\hat{y}) \times B_0 \hat{z} = -I_i 2l B_0 \hat{x} = -\frac{(B_0 2l)^2 v_0}{R} \hat{x} \quad (56)$$

La forza meccanica che compensa questa forza per mantenere il moto rettilineo uniforme è

$$\underline{F}_M = \frac{(B_0 2l)^2 v_0}{R} \hat{x} = 43.2 \hat{x} \text{ N} \quad (57)$$

Questa forza dovrà agire fintanto che il lato $\underline{CD}$ della spira non ha percorso l'intero tratto h è quindi il lavoro compiuto è

$$L_M = |\underline{F}_M| h = \frac{(B_0 2l)^2 v_0 h}{R} = 8.64 \text{ J} \quad (58)$$