

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

14 Febbraio 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Si consideri una sfera conduttrice nel vuoto, di raggio esterno $R_1 = 1.9$ cm su cui è presente una carica Q . In posizione concentrica rispetto alla sfera conduttrice è presente un guscio sferico di materiale dielettrico, lineare, omogeneo, isotropo, caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 13$ e di raggio interno $R_2 = 2R_1$ ed esterno $R_3 = 3R_1$. Calcolare la capacità della sfera conduttrice in presenza del guscio dielettrico.

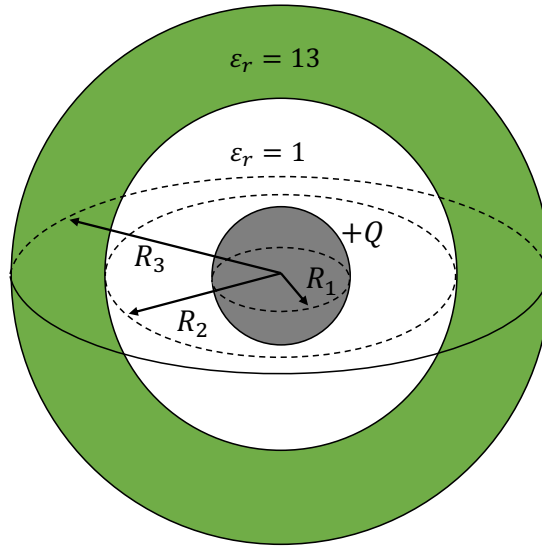


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

La capacità della sfera è pari al rapporto tra la quantità di carica e il potenziale elettrostatico a cui si trova la sfera, $C = Q/V(R_1)$.

La sfera conduttrice è una regione equipotenziale per cui il potenziale può essere calcolato su un punto qualsiasi posto sulla superficie del conduttore stesso. Il calcolo del potenziale richiede anzitutto la determinazione del campo elettrostatico presente ovunque esternamente alla sfera, sia nel vuoto che all'interno del guscio dielettrico. Indichiamo con

Data la simmetria sferica del problema, è possibile determinare l'espressione della componente radiale D_r del vettore induzione elettrica all'interno della regione di dielettrico utilizzando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici. Considerando una superficie sferica di Gauss di raggio $R_2 < r < R_3$ si ha:

$$D_r 4\pi r^2 = Q \quad (1)$$

Il vettore induzione elettrica $\underline{D}(r)$ all'interno del guscio dielettrico è quindi:

$$\underline{D}(r) = D_r \hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \frac{C}{m^2} \quad (2)$$

essendo $\hat{r}$ il versore radiale di un sistema di riferimento sferico origine al centro del sistema. Per un dielettrico omogeneo, isotropo, lineare si ha in tutti i punti interni al dielettrico $\underline{D}(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(r)$ Quindi il campo elettrico all'interno del primo guscio dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (3)$$

Per quanto riguarda il campo elettrostatico esterno al guscio dielettrico, sempre sfruttando la simmetria sferica del problema ed applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $r > R_3$ si ottiene facilmente:

$$\underline{E}_3(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (4)$$

Analogamente, il campo elettrostatico nella intercapedine di vuoto tra la sfera e il guscio, cioè per $R_1 < r < R_2$, è

$$\underline{E}_1(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (5)$$

Il potenziale $V(R_1)$ a cui si trova il conduttore si calcola integrando il lavoro elementare $-\underline{E}(r) \cdot d\mathbf{l}$ che si compie contro le forze del campo per spostare una carica positiva unitaria di un tratto $d\mathbf{l}$, lungo un cammino rettilineo radiale che si estende dall'infinito fino alla superficie esterna del conduttore¹:

$$V(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} \underline{E}_1(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \underline{E}_2(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_3}^{\infty} \underline{E}_3(r) \cdot \hat{r} dr \quad (6)$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad (7)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{R_3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_3}^{\infty} \quad (8)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \quad (9)$$

Sostituendo i valori noti:

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{78} + \frac{1}{3} \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} \frac{11}{13} \quad V \quad (11)$$

da cui

$$C = \frac{Q}{V(R_1)} = 4\pi\epsilon_0 R_1 \frac{13}{11} \cong 2.5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (12)$$

¹Si ricordi che il conduttore è una regione equipotenziale.

Problema 2 (8 punti) Si consideri il circuito di figura 2, dove $C_1 = C_2 = C_3 = 200$ pF, $C_4 = 3C_1$, sono inizialmente scarichi e gli interruttori aperti. Dapprima, chiudendo l'interruttore S_1 , si caricano C_1 e C_2 applicando una differenza di potenziale $\Delta V = 50V$. Poi S_1 viene aperto e il condensatore carico C_2 viene collegato a restanti condensatori chiudendo l'interruttore S_2 . Calcolare la differenza di potenziale ai capi dei condensatori C_3 e C_4 alla fine del processo.

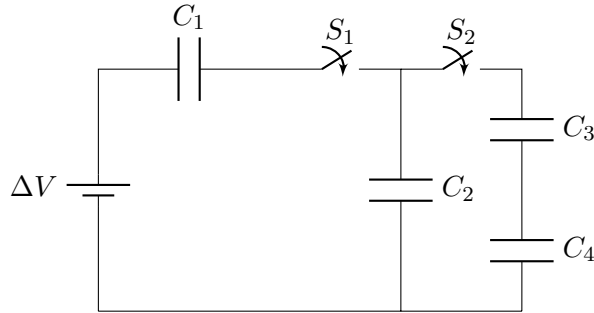


Figura 2: Circuito equivalente del problema 2

Soluzione del problema 2

fase a

Con l'interruttore S_1 chiuso e l'interruttore S_2 aperto il generatore carica i due condensatori C_1 e C_2 in serie. La capacità totale della serie è:

$$C_s^a = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} C_1 = 100 \text{ pF} \quad (13)$$

A regime, la quantità di carica totale del condensatore equivalente C_s^a è

$$Q^a = \frac{1}{2} C_1 \Delta V = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (14)$$

Poiché i due condensatori C_1 e C_2 sono in serie, la carica Q_a è anche quella che si deposita sulle armature dei singoli condensatori.

fase b

Successivamente l'interruttore S_1 viene aperto e l'interruttore S_2 chiuso. Indichiamo con C_s^b il condensatore equivalente alla serie delle capacità C_3 e C_4 .

$$C_s^b = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{3}{4} C_1 = 150 \text{ pF} \quad (15)$$

All'equilibrio finale, ai capi del parallelo tra C_2 e C_s^b si ha la stessa differenza di potenziale ΔV^b . La quantità di carica Q_a presente inizialmente sulle armature di C_2 si ridistribuisce anche sulle armature di C_s^b . La capacità totale del parallelo di condensatori è:

$$C_p^b = C_2 + C_s^b = \frac{7}{4} C_1 = 350 \text{ pF} \quad (16)$$

La carica totale rimane invariata dopo la chiusura di S_2 perché il sistema è isolato. Si può quindi determinare la differenza di potenziale ΔV^b nota la carica Q^a iniziale :

$$\Delta V^b = \frac{Q^a}{C_p^b} = \frac{2}{3} C_1 \Delta V \frac{4}{7 C_1} = \frac{2}{7} \Delta V \cong 14.29 \text{ V} \quad (17)$$

Nota la differenza di potenziale finale ai capi del parallelo di condensatori C_2 e C_s^b , le cariche finali su questi condensatori risulteranno:

$$Q_2^b = C_2 \Delta V^b = \frac{2}{7} C_1 \Delta V \cong 2.86 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (18)$$

$$Q_s^b = C_s^b \Delta V^b = \frac{3}{14} C_1 \Delta V \cong 2.14 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (19)$$

Si osservi che $(Q_2^b + Q_s^b) = Q^a$. Dato che la carica Q_s^b è anche quella presente sulle armature dei condensatori in serie C_3 e C_4 , ai capi di questi si stabiliranno le differenze di potenziale:

$$\Delta V_3^b = \frac{Q_s^b}{C_3} = \frac{3}{14} \Delta V \cong 10.71 \text{ V} \quad (20)$$

$$\Delta V_4^b = \frac{Q_s^b}{C_4} = \frac{1}{14} \Delta V \cong 3.57 \text{ V} \quad (21)$$

Problema 3 (8 punti) Il circuito elettrico mostrato in figura è formato da un filo conduttore composto da due tratti rettilinei PQ e MN e da due archi di circonferenza QM e NP di raggio $R_1 = 12.2$ cm ed $R_2 = 1.5R_1$ e centro nell'origine del sistema di riferimento. I tratti MN e PQ si trovano sui due raggi dei due archi di circonferenza concentrici e sono inclinati fra loro di $\alpha = 90^\circ$, come mostrato in figura 3. Il circuito è percorso da una corrente stazionaria I . Sapendo che il campo di induzione magnetica totale misurato nell'origine è $\underline{B}(0) = -30.04 \cdot 10^{-6}$ T calcolare il valore della corrente I .

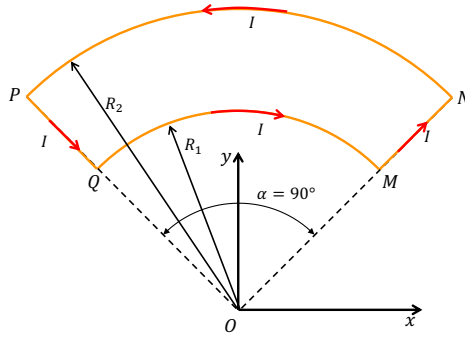


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il vettore induzione magnetica generato nell'origine del sistema di riferimento può essere calcolato utilizzando la prima formula di Laplace:

$$d\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\underline{l}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad (22)$$

Consideriamo un qualsiasi elementino $d\underline{l}(\underline{r}')$ posto sui due tratti rettilinei PQ e MN . Poiché il punto di osservazione è nell'origine il contributo (22) è nullo perché i due vettori $d\underline{l}(\underline{r}')$ e $(\underline{r} - \underline{r}')$ sono paralleli. Di conseguenza il campo di induzione magnetica nell'origine sarà dato solo dalla corrente che scorre nei due tratti curvilinei.

Per quanto riguarda i due tratti semicircolari, consideriamo un sistema di riferimento cilindrico $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ associato al riferimento cartesiano, con centro nell'origine. Con riferimento alla figura 4 consideriamo un elementino di cammino $d\underline{l}(\underline{r}'_2)$, posizionato in $\underline{r}'_2 = R_2 \hat{\rho}'_2 = R_2(\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y})$ sul cammino NP . La

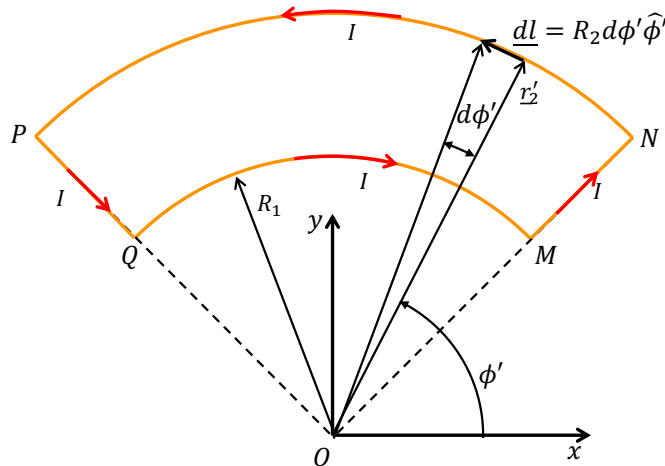


Figura 4: Geometria per il calcolo dei tratti curvilinei

sua distanza dal centro è indipendente da ϕ' e si può scrivere:

$$d\mathbf{l} = R_2 d\phi' \hat{\phi}' \quad (23)$$

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2) = d\mathbf{l} \times (-\mathbf{r}'_2) = R_2 d\phi' \hat{\phi}' \times (-R_2 \hat{\phi}'_2) = (R_2)^2 d\phi' \hat{z} \quad (24)$$

Sostituendo nella prima formula di Laplace:

$$d\mathbf{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(R_2)^2}{(R_2)^3} d\phi' \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_2} d\phi' \hat{z} \quad (25)$$

Integrando l'espressione precedente tra gli estremi $\phi'_a \leq \phi'_b$, e tenendo presente che $(\phi'_b - \phi'_a) = \pi/2$, si ottiene che il contributo del tratto semicircolare NP è

$$\mathbf{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_2} \int_{\phi'_a}^{\phi'_b} d\phi' \hat{z} \quad (26)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_2} (\phi'_b - \phi'_a) \hat{z} \quad (27)$$

$$= \frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_2} \hat{z} = \frac{\mu_0}{12} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad (28)$$

In modo del tutto analogo si dimostra che il contributo del tratto semicircolare QM è²

$$\mathbf{B}_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_1} \int_{\phi'_a}^{\phi'_b} d\phi' (-\hat{z}) \quad (29)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_1} (\phi'_b - \phi'_a) \hat{z} = -\frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad (30)$$

Sommando vettorialmente i due contributi, il campo di induzione totale nell'origine è:

$$\mathbf{B}_t(0,0) = \mathbf{B}_1(0,0) + \mathbf{B}_2(0,0) = \left[\frac{\mu_0}{12} \frac{I}{R_1} - \frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_1} \right] \hat{z} = -\frac{\mu_0}{24} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad (31)$$

Risolvendo per I e considerando solo i moduli si ottiene:

$$I = \frac{24R_1}{\mu_0} |\mathbf{B}_t(0,0)| \quad (32)$$

da cui $I \cong 70 \text{ A}$

²Alternativamente, data la simmetria circolare del problema, in entrambi i casi il campo di induzione magnetica (30) e (28) sono equivalenti singolarmente a un quarto il campo di induzione generato da una spira circolare al proprio centro $\mathbf{B}_{1,2}(0,0) = \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} (\pm \hat{z})$.

Problema 4 (8 punti) Un circuito chiuso è formato da un solenoide piano a sezione rettangolare di lati $a = 0.2$ m e $b = 4a$ m. Il solenoide è composto da $n = 25$ spire di filo conduttore che presentano globalmente una resistenza totale di $R = 50 \Omega$ e si trova immerso in un campo di induzione magnetica uniforme $\underline{B} = 0.3\hat{z}$ T, presente solo nella regione $-\frac{b}{2} < x < 0$. All'istante $t = 0$ il solenoide viene estratto dalla regione in cui è presente il campo di induzione da una forza meccanica mantenendo un moto rettilineo uniforme parallelo ad uno dei suoi lati maggiori con velocità $\underline{v} = v_x\hat{x}$. Durante l'operazione il piano del solenoide rimane sempre parallelo al piano xy . Nell'ipotesi che sia $v_x = 10$ m/s, determinare l'ampiezza e l'andamento nell'intervallo di tempo $0 < t < \frac{b}{v_x}$ della corrente e della potenza dissipata sulla resistenza R .

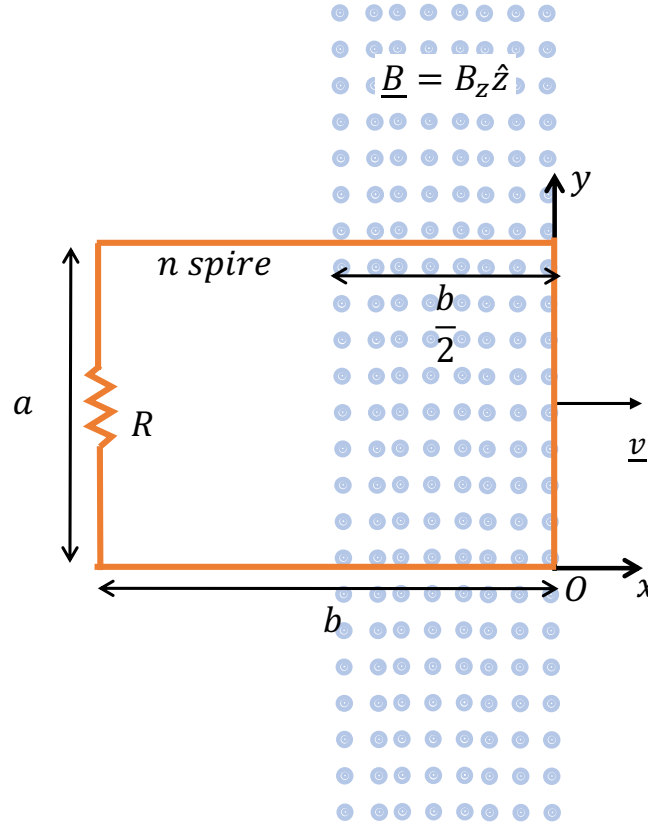


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

Dal tempo $t = 0$ fino al tempo $t_1 = b/2v_x = 40$ ms il solenoide trasla rispetto alla regione interessata dal campo di induzione magnetica, ma non si ha nessuna variazione del flusso attraverso la spira per cui la forza elettromotrice indotta è nulla. In queste condizioni non circola corrente indotta e di conseguenza anche la potenza dissipata sulla resistenza è nulla. Dal tempo $t_1 = b/2v_x = 40$ ms fino al tempo $t_2 = b/v_x = 80$ ms il solenoide esce dalla regione in cui è presente il campo di induzione magnetica e si registra dunque una diminuzione del flusso del campo attraverso il solenoide. Di conseguenza si produrrà, secondo la legge di Faraday, Neumann e Lenz, una f.e.m. e di conseguenza una corrente indotta I nel circuito chiuso.

Con riferimento alla figura 6, indichiamo con $x(t) = v_x t$ la posizione al tempo t del lato OA del solenoide rispetto all'asse y . Poichè il campo $\underline{B}(\underline{r})$ è uniforme sulla superficie del solenoide, il flusso all'istante t è dato da:

$$\Phi[\underline{B}, t] = \iint_S \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds = \begin{cases} nB_z \frac{ab}{2} & \text{Wb} & 0 < t < \frac{b}{2v_x} = 40\text{ms} \\ nB_z a(b - v_x t) & \text{Wb} & \frac{b}{2v_x} < t < \frac{b}{v_x} = 80\text{ms} \end{cases} \quad (33)$$

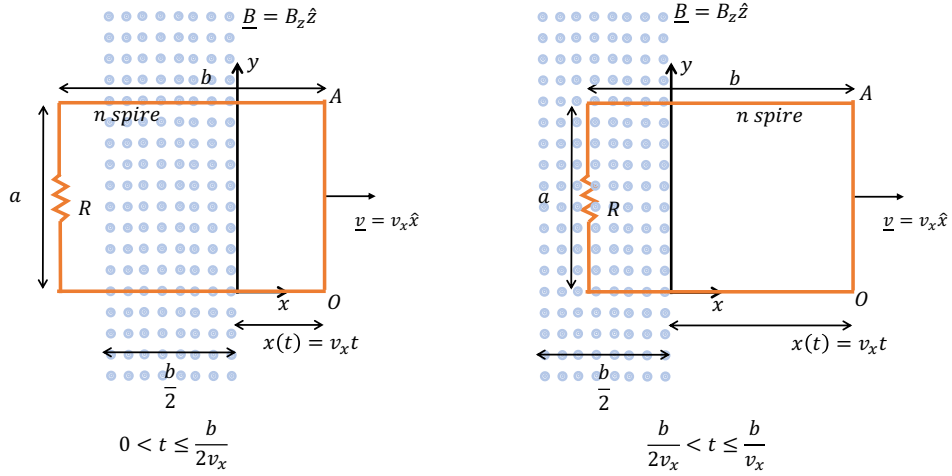


Figura 6: Geometria per il calcolo del flusso al variare del tempo

Il modulo della f.e.m. indotta è dunque

$$\mathcal{E}_i = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \begin{cases} 0 & \text{V} & 0 < t < \frac{b}{2v_x} = 40\text{ms} \\ nB_z a v_x = 15 & \text{V} & \frac{b}{2v_x} < t < \frac{b}{v_x} = 80\text{ms} \end{cases} \quad (34)$$

Ricapitolando, la corrente che circola nel solenoide in senso *antiorario* nell'intervallo di tempo richiesto dal problema è

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \begin{cases} 0 & 0 < t < 40\text{ms} \\ \frac{nB_z a v_x}{R} = 0.3 & \text{A} & 40\text{ms} < t < 80\text{ms} \end{cases} \quad (35)$$

La potenza dissipata sulla resistenza è data da:

$$P(t) = \frac{(\mathcal{E}_i)^2}{R} = \begin{cases} 0 & 0 < t < 40\text{ms} \\ \frac{(nB_z a v_x)^2}{R} = 4.5 & \text{W} & 40\text{ms} < t < 80\text{ms} \end{cases} \quad (36)$$