

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

13 Aprile 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Si considerino due distribuzioni lineari uniformi di carica positiva, $\lambda_1 = \lambda$ [C/m] e $\lambda_2 = 3\lambda$ [C/m], piegate in modo da formare due quarti di circonferenza opposti, giacenti sul piano $z = 0$ (Fig. 1) di un sistema di riferimento cartesiano. La distribuzione di carica λ_1 si estende per $\frac{3}{4}\pi < \phi' < \frac{5}{4}\pi$ con distanza dal centro $a = 0.25$ m mentre la distribuzione di carica λ_2 si estende per $-\frac{\pi}{4} < \phi' < \frac{\pi}{4}$ con distanza dal centro b . Determinare:

- (5 punti) Il valore del raggio b in modo che il campo totale elettrico nell'origine del sistema di riferimento sia nullo;
- (3 punti) il valore delle distribuzioni lineari di carica elettrica λ_1 e λ_2 sapendo che il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie sferica di raggio $R = 4a$ e centro nell'origine è $\Phi(\underline{E}) = 1.0201 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}$.

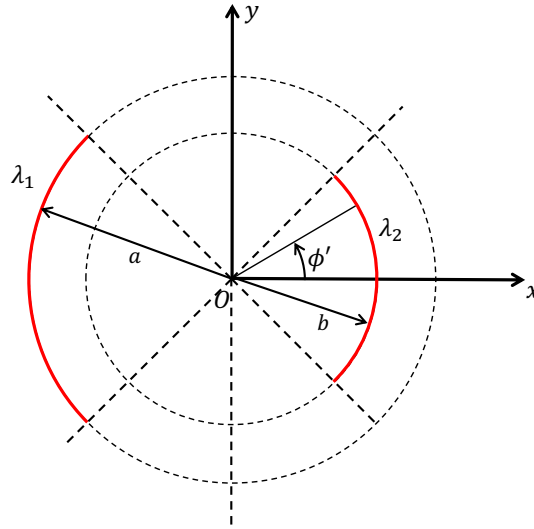


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)
Consideriamo inizialmente il quarto di circonferenza con distribuzione lineare di densità di carica λ_1 . Utilizzando la coordinata angolare ϕ' , il tratto infinitesimo di circonferenza dl' , su cui è localizzata la carica infinitesima $dq = \lambda_1 dl'$ può essere espresso da

$$dl' = a d\phi' \quad (1)$$

mentre il vettore $\underline{r}'$ che individua la posizione di tale carica infinitesima, utilizzando la coordinata angolare ϕ' , è:

$$\underline{r}' = a \cos \phi' \hat{x} + a \sin \phi' \hat{y} \quad (2)$$

Il contributo di campo elettrico elementare nell'origine dovuto alla carica elementare $dq = \lambda_1 dl'$ posizionata in $\underline{r}'$ è:

$$d\underline{E}_1(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1 a d\phi'}{a^3} (-a \cos \phi' \hat{x} - a \sin \phi' \hat{y}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\phi'}{a} (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) \quad \frac{V}{m} \quad (3)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo elettrico totale nell'origine è dovuto dalla sovrapposizione di tutti i contributi elementari per $\frac{3}{4}\pi < \phi' < \frac{5}{4}\pi$:

$$\underline{E}_1(0,0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \frac{\lambda d\phi'}{a} (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) \quad (4)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) d\phi' \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}\lambda}{a} \hat{x} \quad \frac{V}{m} \quad (6)$$

Con procedimento analogo a quello precedente si ottiene l'espressione del campo elettrico generato dalla distribuzione lineare di densità di carica λ_2 nell'origine che risulta essere:

$$\underline{E}_2(0,0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\lambda_2 d\phi'}{b} (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) \quad (7)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\sqrt{2}\lambda}{b} \hat{x} \quad \frac{V}{m} \quad (8)$$

Il campo elettrostatico totale nell'origine $\underline{E}_t(0,0)$ si ottiene sommando i contributi precedenti:

$$\underline{E}_t(0,0) = \underline{E}_1(0,0) + \underline{E}_2(0,0) = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{3}{b} \right) \hat{x} \quad \frac{V}{m} \quad (9)$$

La condizione $\underline{E}_t(0,0)$ si ottiene quindi per $b = 3a = 0.75$ m.

b)

Per il teorema di Gauss il flusso $\Phi(\underline{E})$ del vettore campo elettrico nel vuoto attraverso una superficie chiusa S è

$$\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{n} \, dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (10)$$

dove Q è la carica totale contenuta all'interno della superficie chiusa. Per il problema in esame la superficie sferica di raggio $R = 4a$ con centro l'origine racchiude completamente entrambe le distribuzioni di carica. La carica totale associata alla distribuzione di raggio a è:

$$Q_1 = \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \lambda a d\phi' = \lambda \frac{\pi}{2} a \quad C \quad (11)$$

Analogamente, a carica totale associata alla distribuzione di raggio $b = 3a$ è:

$$Q_2 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 3\lambda b d\phi' = 9\lambda \frac{\pi}{2} a \quad C \quad (12)$$

La carica totale racchiusa dalla superficie sferica è:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 10\lambda \frac{\pi}{2} a \quad C \quad (13)$$

Per il teorema di Gauss si ha quindi:

$$\Phi(\underline{E}) = \frac{10\lambda\pi a}{2\epsilon_0} \quad (14)$$

da cui si ricava

$$\lambda = \Phi(\underline{E}) \frac{2\epsilon_0}{10\pi a} = 2.3 \quad \frac{\mu\text{C}}{\text{m}} \quad (15)$$

Problema 2 (8 punti) Una sfera di materiale dielettrico, isotropo, omogeneo di costante dielettrica ϵ_r e raggio a possiede una densità volumetrica di carica elettrica $\rho_v(\underline{r}) = -\gamma r^2$ dove $\gamma = 1.19 \cdot 10^{-2} [\text{C}/\text{m}^5]$. Un guscio conduttore sferico, neutro, di raggio interno $a = 0.05 \text{ m}$ e raggio esterno $b = 2a$ è concentrico alla sfera isolante carica.

- (5 punti) Calcolare il lavoro necessario per spostare una carica elettrica puntiforme di valore $q = 3 \cdot 10^4 \text{ C}$ dal punto $P_1 = (4a, 0, 0)$ al un punto $P_2 = (0, 6a, 0)$;
- (3 punti) Calcolare il valore delle densità di carica superficiale sulla superficie esterna del guscio conduttore.

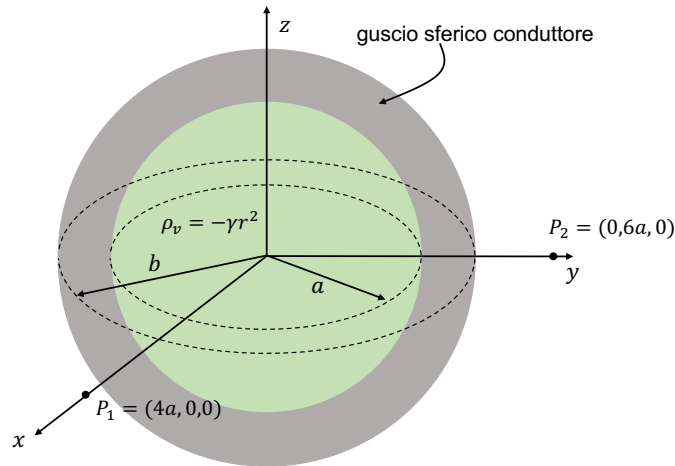


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

La carica totale all'interno del guscio conduttore sferico e contenuta dalla sfera dielettrica è data da

$$Q = \iiint_V \rho_v(\underline{r}') dv' = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (-\gamma) (r')^4 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \quad (16)$$

$$= -\gamma 4\pi \int_0^a (r')^4 dr' = -\gamma 4\pi \frac{a^5}{5} \cong -9.346 \cdot 10^{-7} \text{ C} \quad (17)$$

Data la simmetria sferica si può calcolare il campo elettrico esterno al guscio conduttore utilizzando il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie sferica di raggio $r \geq b$. È facile dimostrare che per $r > b$ il campo elettrico è esterno è equivalente a quello generato da una distribuzione di carica puntiforme Q posta nell'origine:

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = -\frac{\gamma a^5}{5\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (18)$$

Essendo la carica totale confinata al finito si ha $V(\infty) = 0$ per cui il potenziale elettrostatico in un qualunque punto P esterno al guscio conduttore, a distanza $R > b$ dal centro è dato da

$$V(R) = - \int_\infty^R \underline{E}(r) \cdot d\underline{r} = \int_R^\infty \underline{E}(r) \cdot \hat{r} dr = \int_R^\infty \left[-\frac{\gamma a^5}{5\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right] \cdot \hat{r} dr \quad (19)$$

$$= -\frac{\gamma a^5}{5\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{\gamma a^5}{5\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (20)$$

Poiché il campo elettrico è conservativo, il lavoro L necessario per spostare la carica elettrica puntiforme di valore q dal punto P_1 al punto P_2 è dato da:

$$L = q [V(P_2) - V(P_1)] = q \left[-\frac{\gamma a^5}{5\epsilon_0} \frac{1}{6a} + \frac{\gamma a^5}{5\epsilon_0} \frac{1}{4a} \right] \quad (21)$$

$$= q \frac{\gamma a^4}{5\epsilon_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right] = q \frac{\gamma a^4}{5\epsilon_0} \frac{1}{12} \cong 0.0105 \text{ J} \quad (22)$$

b)

Per induzione completa la carica totale che si induce sulla superficie interna del guscio conduttore è pari all'opposto della carica totale contenuta nella sfera dielettrica $Q_{int} = -Q \cong 9.346 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Poiché il campo elettrostatico all'interno del conduttore deve essere nullo, sulla superficie esterna del guscio conduttore si induce una carica elettrica totale uguale a quella contenuta nella sfera dielettrica. Data la simmetria sferica, tale carica si distribuisce uniformemente per cui la densità di carica superficiale sulla superficie esterna risulta essere:

$$\sigma_{ext} = \frac{Q}{4\pi b^2} = -7.437 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (23)$$

Problema 3 (8 punti) Tre fili conduttori, infinitamente lunghi, percorsi dalle correnti $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = I\hat{z}$ ed $\underline{I}_3 = -4I\hat{z}$ sono tra loro paralleli ed intersecano perpendicolarmente il piano xy di un sistema di riferimento cartesiano nei seguenti punti: $P_1 = (-a, a)$; $P_2 = (a, a)$; $P_3 = (0, b)$ (figura 3). Determinare l'espressione di b in funzione di a in modo tale che il campo di induzione magnetica totale nell'origine sia nullo.

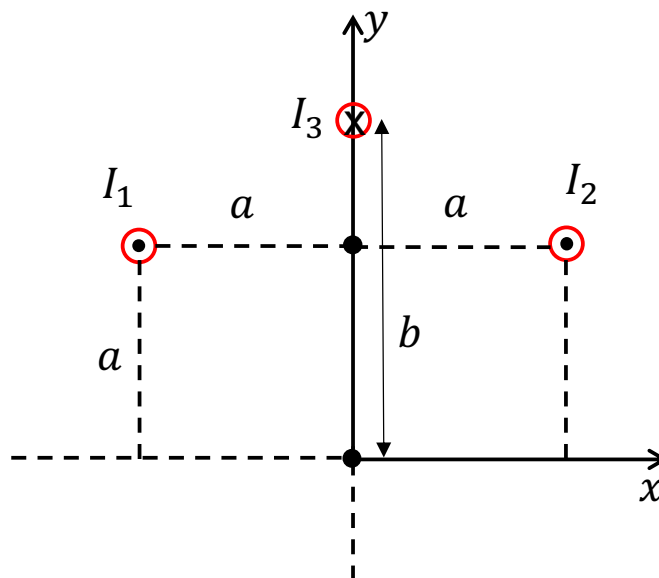


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Sappiamo che il campo di induzione magnetica $\underline{B}(P)$ generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente stazionaria I su un qualunque punto P di un piano perpendicolare al filo è dato dalla formula di Biot-Savart:

$$\underline{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \hat{t} \quad (24)$$

dove R è la distanza del punto sul piano dal filo e il versore $\hat{t}$ è il versore in P sul piano tangente alla circonferenza di raggio R (vedi figura 4). Il campo di induzione magnetica totale nell'origine può essere

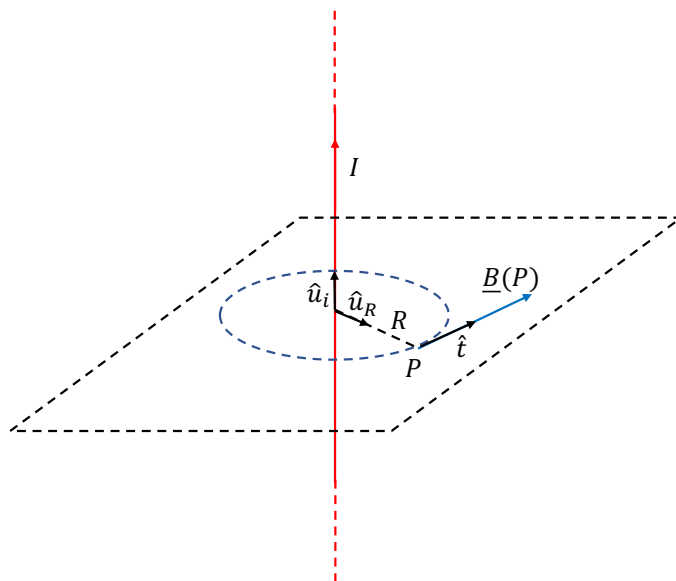


Figura 4: Campo di induzione generato da un filo infinito rettilineo di corrente

calcolato mediante il principio di sovrapposizione degli effetti sommando vettorialmente i campi di induzione magnetica generati dai fili posti in P_1 , P_2 e P_3 . Dalla espressione (24), i contributi all'induzione magnetica nell'origine dei fili rettilinei posti in P_1 , P_2 e P_3 sono rispettivamente

$$\underline{B}_1(0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\sqrt{2}a} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{x} + \hat{y}) \right] \quad (25)$$

$$\underline{B}_2(0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\sqrt{2}a} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{x} - \hat{y}) \right] \quad (26)$$

$$\underline{B}_3(0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{4I}{b} (-\hat{x}) \quad (27)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti l'induzione magnetica totale nell'origine è

$$\underline{B}(0) = \underline{B}_1(0) + \underline{B}_2(0) + \underline{B}_3(0) \quad (28)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2a} (\hat{x} + \hat{y}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2a} (\hat{x} - \hat{y}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{4I}{b} (-\hat{x}) \quad (29)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b} \right) \hat{x} \quad (30)$$

Imponendo $\underline{B}(0) = 0$ si ottiene $b = 4a$.

Problema 4 (8 punti) Un circuito chiuso è formato da un solenoide a sezione rettangolare di lati $a = 0.2$ m e $b = 0.5$ m. Il solenoide è composto da $N = 30$ spire di filo conduttore che presentano globalmente una resistenza totale di $R = 15 \Omega$ e si trova immerso in un campo di induzione magnetica di ampiezza variabile sia in distanza che nel tempo $\underline{B} = B_z x t \hat{z}$. Sapendo che l'energia totale dissipata nel solenoide nell'intervallo di tempo $0 < t < 10$ sec. è $W = 3.375$ J, calcolare il valore della costante B_z indicando la sua unità di misura.

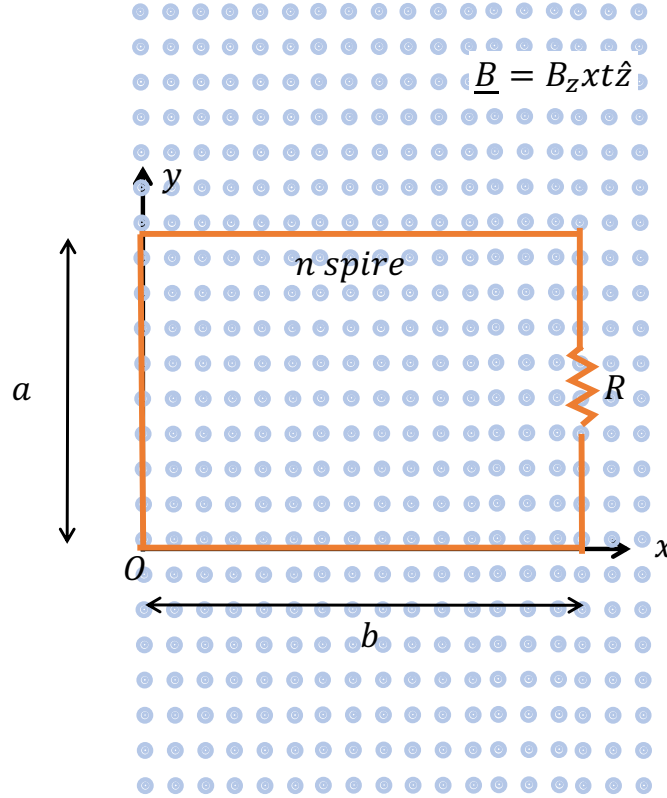


Figura 5: Geometria del problema

Soluzione al problema 4

Dal tempo $t = 0$ fino al tempo $t_1 = 10$ sec il campo di induzione magnetica aumenta la propria intensità linearmente con il tempo. Si registra dunque un aumento del flusso del campo concatenato con il solenoide, e di conseguenza si produrrà, secondo la legge di Faraday, Neumann e Lenz, una f.e.m. che, essendo il circuito costituito da filo conduttore, farà circolare una corrente indotta $I_i(t)$. Poiché il campo $\underline{B}(\underline{r})$ non è uniforme sulla superficie del solenoide, il flusso all'istante t attraverso le N spire del solenoide è dato da:

$$\Phi[\underline{B}, t] = N \iint_S \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds = N \int_0^a \int_0^b B_z x t \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy \quad (31)$$

$$= N \int_0^a \int_0^b B_z x t dx dy = N B_z a \frac{b^2}{2} t \quad \text{Wb} \quad (32)$$

L'analisi dimensionale sulla espressione precedente fornisce il seguente risultato

$$[B_z] = \frac{[Wb]}{[m^3][sec]} = \frac{[Wb]}{[m^2]} \frac{1}{[m][sec]} = \frac{[T]}{[m][sec]} \quad (33)$$

Il modulo della f.e.m. indotta è dunque

$$\mathcal{E}_i(t) = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = N B_z a \frac{b^2}{2} \quad \text{V} \quad (34)$$

La corrente indotta nel solenoide circola in senso *orario* e la sua ampiezza è data da

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{NB_z ab^2}{2R} \quad \text{A} \quad (35)$$

La potenza dissipata sulla resistenza è data da:

$$P = \frac{(\mathcal{E}_i)^2}{R} = \frac{(NB_z ab^2)^2}{4R} \quad \text{W} \quad (36)$$

La potenza dissipata è costante nel tempo quindi durante l'intervallo di tempo totale $\Delta t = 10$ sec. l'energia elettrica W dissipata per effetto Joule risulta

$$W = P \Delta t = \frac{(NB_z ab^2)^2}{4R} \Delta t = 3.375 \quad \text{J} \quad (37)$$

Risolvendo rispetto a B_z

$$B_z = \frac{1}{(Nab^2)} \sqrt{\frac{4RW}{\Delta t}} = 3 \quad \frac{\text{T}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad (38)$$