

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

12 Maggio 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Tre cariche puntiformi di valore $Q_1 = -4Q$, e $Q_2 = Q$, $Q_3 = -3Q$ sono posizionate lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rispettivamente nei punti di coordinate $P_1 = (-a, 0)$, $P_2 = (0, 0)$, $P_3 = (a, 0)$ (vedi figura 1). Calcolare l'espressione del potenziale elettrostatico in un punto generico $P_o = (0, y)$ e determinare, se esiste, l'espressione in funzione di a della coordinata $y^* > 0$ di un punto di osservazione sull'asse y in cui si ha un nullo del potenziale elettrostatico.

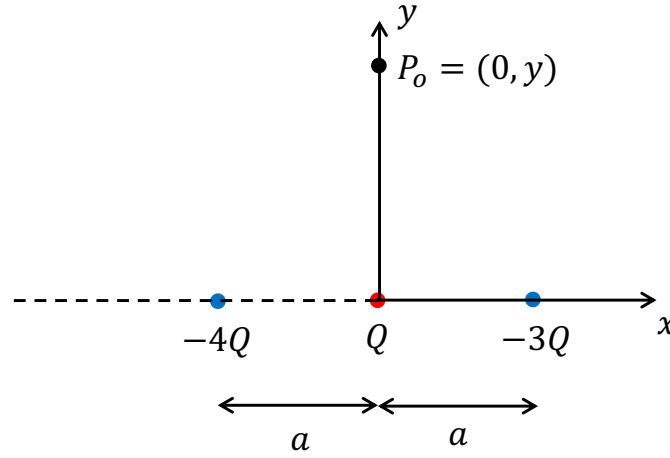


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)
Il potenziale elettrostatico generato in un punto di osservazione generico $\underline{r} = y\hat{y}$ da una carica puntiforme Q posta in un punto generico $\underline{r}' = x'\hat{x}$ dell'asse x è dato da:

$$V(\underline{r}) = \frac{k_e Q}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (1)$$

Tenendo conto della espressione precedente e utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, il potenziale totale generato dalle tre cariche nel punto di osservazione P_0 è dato da:

$$V^t(y) = \frac{k_e(-4Q)}{[a^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_e Q}{y} + \frac{k_e(-3Q)}{[a^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

$$= -\frac{k_e 7Q}{[a^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_e Q}{y} \quad (3)$$

Imponendo la condizione $V^t(y) = 0$ si ottiene l'equazione:

$$7y = \sqrt{(a^2 + y^2)} \quad (4)$$

Risolvendo rispetto a y si ottiene che il potenziale si annulla nel punto sull'asse $y > 0$ di coordinata $y^* = a/(4\sqrt{3})$

Problema 2 (8 punti) Una sfera di materiale dielettrico, isotropo, omogeneo di costante dielettrica ϵ_r e raggio a possiede una densità volumetrica di carica elettrica $\rho_v(\underline{r}) = \frac{\gamma}{r}$ dove $\gamma[\text{C}/\text{m}^2]$ è una costante incognita ed r è la distanza radiale dal centro. Un guscio conduttore sferico, neutro, di raggio interno $a = 50.6 \cdot 10^{-3}$ m e raggio esterno $b = 3a$ è concentrico alla sfera isolante carica.

- (5 punti) Sapendo che il lavoro L_{AB} necessario per spostare una carica elettrica puntiforme di valore $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C dal punto $A = (0, 12a, 0)$ al un punto $B = (0, -6a, 0)$ è $L_{AB} = 100$ J , calcolare il valore della costante γ ;
- (3 punti) Calcolare il valore delle densità di carica superficiale che si localizza sulla superficie *interna* del guscio conduttore.

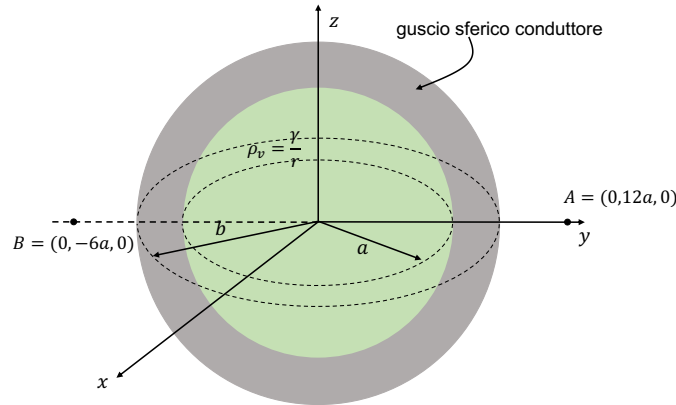


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

La carica totale all'interno del guscio conduttore sferico e contenuta dalla sfera dielettrica è data da

$$Q = \iiint_V \rho_v(\underline{r}') dv' = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\gamma}{r'} \right) (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \quad (5)$$

$$= \gamma 4\pi \int_0^a r' dr' = \gamma 4\pi \frac{a^2}{2} \text{ C} \quad (6)$$

Data la simmetria sferica si può calcolare il campo elettrico esterno al guscio conduttore utilizzando il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie sferica di raggio $r \geq b$. È facile dimostrare che per $r > b$ il campo elettrico è esterno è equivalente a quello generato da una distribuzione di carica puntiforme Q posta nell'origine:

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{\gamma a^2}{2\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (7)$$

Essendo la carica totale confinata al finito si ha $V(\infty) = 0$ per cui il potenziale elettrostatico in un qualunque punto P esterno al guscio conduttore, a distanza $R > b$ dal centro è dato da

$$V(R) = - \int_\infty^R \underline{E}(r) \cdot d\underline{r} = \int_R^\infty \underline{E}(r) \cdot \hat{r} dr = \int_R^\infty \left[\frac{\gamma a^2}{2\epsilon_0 r^2} \right] \cdot \hat{r} dr \quad (8)$$

$$= \frac{\gamma a^2}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{\gamma a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (9)$$

Poiché il campo elettrico è conservativo, il lavoro L necessario per spostare la carica elettrica puntiforme di valore q dal punto A al punto B è dato da:

$$L = q[V(B) - V(A)] = q \left[\frac{\gamma a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{6a} - \frac{\gamma a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{12a} \right] \quad (10)$$

$$= q \frac{\gamma a}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right] = q \frac{\gamma a}{2\epsilon_0} \frac{1}{12} = 100 \text{ J} \quad (11)$$

Risolvendo rispetto a γ si ottiene $\gamma \cong 0.21 \text{ [C/m}^2\text{]}$

b)

Per induzione completa la carica totale che si induce sulla superficie interna del guscio conduttore è pari all'opposto della carica totale contenuta nella sfera dielettrica $Q_{int} = -Q \cong -337.83 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Data la simmetria sferica, tale carica si distribuisce uniformemente per cui la densità di carica superficiale sulla superficie esterna risulta essere:

$$\sigma_{ext} = -\frac{Q}{4\pi a^2} = -0.105 \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (12)$$

Problema 3 (8 punti) Nel vuoto, un conduttore cilindrico di raggio $a = 3$ cm, idealmente infinito ed asse di simmetria coincidente con l'asse z , è percorso dalla corrente stazionaria $\underline{I}_1 = -I_1\hat{z}$, distribuita uniformemente su tutta la sezione. Un secondo conduttore cilindrico cavo di raggio interno $b = 3a$ e raggio esterno $c = 5a$ idealmente infinito con asse z è posizionato concentricamente al primo ed è percorso dalla corrente stazionaria $\underline{I}_2 = I_2\hat{z}$, distribuita uniformemente su tutta la sezione. Il campo di magnetico $\underline{H}(\rho)$ a distanza $\rho = 12a$ dal centro O vale $|\underline{H}(\rho)| = 10$ [A/m]. La circuitazione $\Gamma(\underline{H})$ del campo magnetico $\underline{H}$ lungo il cammino Γ indicato in figura 3 costituito da una semicirconferenza di raggio $12a$, da una semicirconferenza di raggio a e da tre tratti rettilinei lungo l'asse x , è nulla ($\Gamma(\underline{H}) = 0$). Determinare l'intensità delle due correnti.

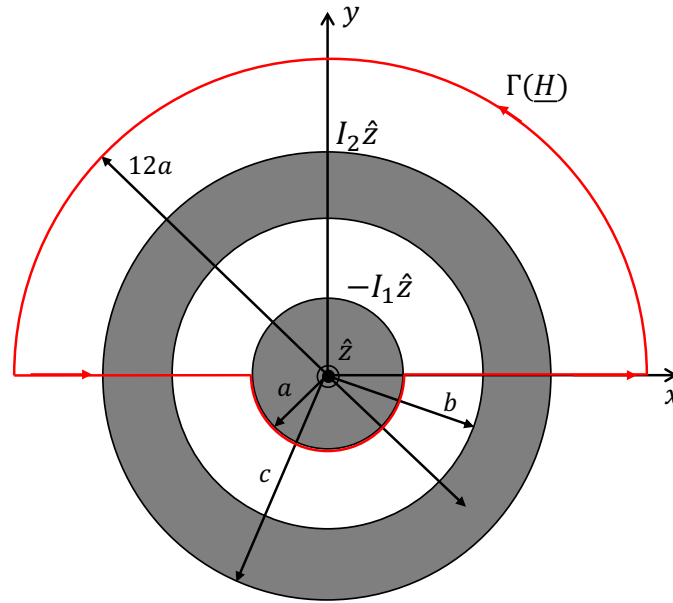


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Poichè le due correnti sono distribuite uniformemente sulle sezioni dei due conduttori, le relazioni tra correnti e densità di corrente sono:

$$I_1 = J_1 \pi a^2 \quad (13)$$

$$I_2 = J_2 \pi (c^2 - b^2) = J_2 16 \pi a^2 \quad (14)$$

Consideriamo la circuitazione del campo magnetico lungo il cammino Γ . Sappiamo che per il teorema della circuitazione di Ampere la circuitazione del campo magnetico lungo il circuito chiuso orientato Γ che costituisce il bordo di una superficie aperta S dipende solo dalle correnti di conduzione, anche in presenza di materiali magnetizzati:

$$\oint_{\Gamma} \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds \quad (15)$$

Tenendo conto del verso delle correnti e del verso di percorrenza del percorso la precedente equazione diventa:

$$\left\{ J_2 \left[\frac{\pi(c^2 - b^2)}{2} \right] - J_1 \pi a^2 \right\} = 0 \quad (16)$$

Sostituendo i valori di b e c l'equazione (16) diventa:

$$\left\{ J_2 8 \pi a^2 - J_1 \pi a^2 \right\} = \pi a^2 [8J_2 - J_1] = 0 \quad (17)$$

Da questa si deduce che

$$J_1 = 8J_2 \quad (18)$$

Utilizzando le espressioni (13) e (14) si deduce che

$$I_2 = 2I_1 \quad (19)$$

Consideriamo adesso un cammino circolare di raggio $\rho = 12a$ percorso in senso antiorario. Data la simmetria del problema il campo magnetico $\underline{H}$ in tutti punti del cammino è esprimibile rispetto ad un sistema di riferimento cilindrico come

$$\underline{H}(\rho, \phi, z) = H_\phi(\rho) \hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (20)$$

Utilizzando anche in questo caso il teorema della circuitazione di Ampere e tenendo conto del verso delle correnti si ha:

$$H_\phi(12a)2\pi 12a = (I_2 - I_1) = I_1 \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (21)$$

L'intensità di I_1 è

$$I_1 = H_\phi(12a)24\pi a \quad \text{A} \quad (22)$$

Sostituendo i valori

$$\underline{I}_1 = 22.62\hat{z} \quad \text{A} \quad (23)$$

$$\underline{I}_2 = -45.24\hat{z} \quad \text{A} \quad (24)$$

Problema 4 (8 punti) Un circuito chiuso è formato da un solenoide a sezione rettangolare di lati $a = 0.4$ m e $b = 1$ m. Il solenoide è composto da $N = 15$ spire di filo conduttore che presentano globalmente una resistenza totale di $R = 10 \Omega$ e si trova immerso in un campo di induzione magnetica di ampiezza variabile sia in distanza che nel tempo $\underline{B} = B_z y t^2 \hat{z}$. Sapendo che l'energia totale dissipata nel solenoide nell'intervallo di tempo $0 < t < 5$ sec. è $W = 216$ J, calcolare il valore della costante B_z indicando la sua unità di misura.

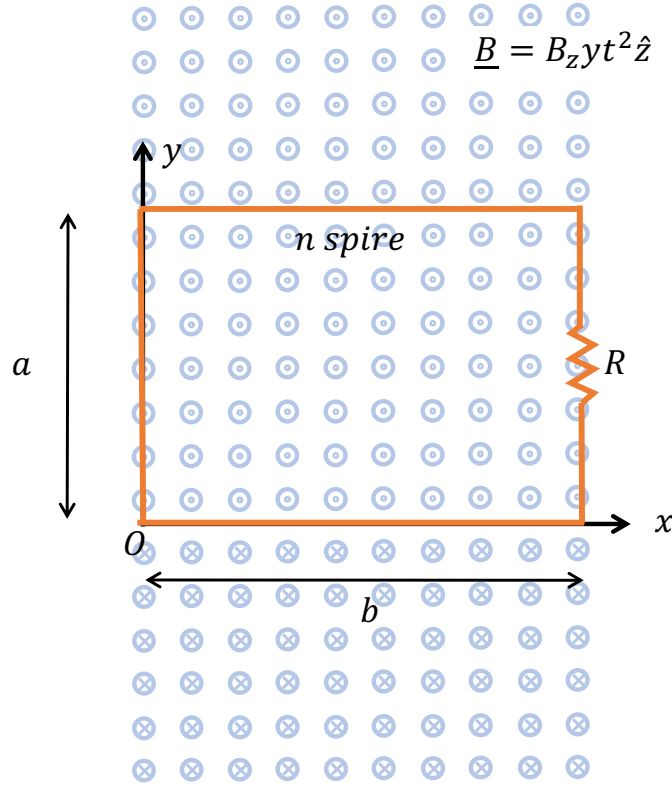


Figura 4: Geometria del problema 4

Soluzione al problema 4

Dal tempo $t = 0$ fino al tempo $t_1 = 5$ sec il campo di induzione magnetica aumenta la propria intensità quadraticamente con il tempo. Si registra dunque un aumento del flusso del campo concatenato con il solenoide, e di conseguenza si produrrà, secondo la legge di Faraday, Neumann e Lenz, una f.e.m. indotta $\mathcal{E}_i(t)$ che, essendo il circuito costituito da filo conduttore, farà circolare una corrente indotta $I_i(t)$. Poiché il campo $\underline{B}(\underline{r})$ non è uniforme sulla superficie del solenoide, il flusso all'istante t attraverso le N spire del solenoide è dato da:

$$\Phi[\underline{B}, t] = N \iint_S \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds = N \int_0^a \int_0^b B_z y t^2 \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy \quad (25)$$

$$= N \int_0^a \int_0^b B_z y t^2 dx dy = N B_z b \frac{a^2}{2} t^2 \quad \text{Wb} \quad (26)$$

L'analisi dimensionale sulla espressione precedente fornisce il seguente risultato

$$[B_z] = \frac{[Wb]}{[m^3][sec^2]} = \frac{[Wb]}{[m^2]} \frac{1}{[m][sec^2]} = \frac{[T]}{[m][sec^2]} \quad (27)$$

Il modulo della f.e.m. indotta è dunque

$$\mathcal{E}_i(t) = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = N B_z b a^2 t \quad \text{V} \quad (28)$$

La corrente indotta nel solenoide circola in senso *orario* e la sua ampiezza è data da

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{NB_z ba^2 t}{R} \quad \text{A} \quad (29)$$

La potenza istantanea dissipata sulla resistenza è data da:

$$P(t) = \frac{(\mathcal{E}_i)^2}{R} = \frac{(NB_z ba^2 t)^2}{R} \quad \text{W} \quad (30)$$

La potenza dissipata non è costante nel tempo quindi durante l'intervallo di tempo $t \in [0, t_1]$ sec. l'energia elettrica totale W dissipata per effetto Joule risulta

$$W = \int_0^{t_1} P(t) dt = \frac{(NB_z ba^2)^2}{R} \int_0^{t_1} t^2 dt = \frac{(NB_z ba^2)^2}{R} \frac{(t_1)^3}{3} = 216 \quad \text{J} \quad (31)$$

Risolvendo rispetto a B_z

$$B_z = \frac{1}{(Na^2b)} \sqrt{\frac{3RW}{125}} = 3 \quad \frac{\text{T}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \quad (32)$$