

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

20 Giugno 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Un nastro isolante di spessore infinitesimo di raggio interno a ed esterno $b = 2a$ è posto sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano con centro nell'origine (vedi figura 1). Sul nastro è distribuita una densità superficiale di carica elettrica uniforme $\sigma(\underline{r}') = \sigma_0$ dove σ_0 è una costante.

Determinare ¹

- (5 punti) l'espressione vettoriale del campo elettrico nel punto di osservazione generico $P = (0, 0, z)$ con $z > 0$.
- (3 punti) modulo, direzione e verso della forza elettrica che subisce una carica puntiforme di valore $q = 10^{-6} \text{ C}$ quando si trova nel punto $P_1 = (0, 0, 4a)$ nell'ipotesi che sia $a = 0.3 \text{ m}$ e $\sigma_0 = 233.88 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$.

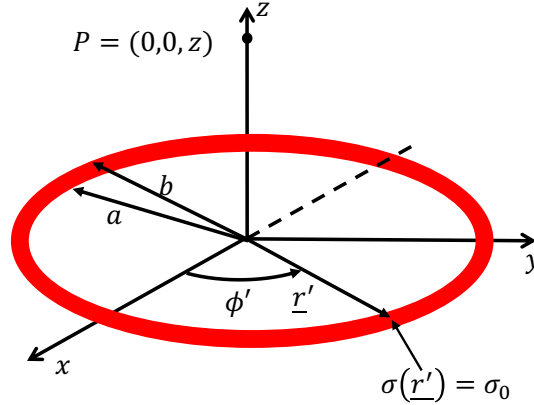


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Consideriamo il sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) associato al sistema di riferimento cartesiano. Un generico punto sorgente sul nastro isolante carico può essere univocamente determinato dal vettore posizione $\underline{r}' = \rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y}$. L'areola elementare posta in $\underline{r}'$ espressa in coordinate cilindriche è $ds' = \rho' d\rho' d\phi'$. A questa areola è associata una carica puntiforme

$$dq'(\underline{r}') = \sigma_0 ds' = \sigma_0 \rho' d\rho' d\phi' \quad (1)$$

dove $a < \rho' < b$ e $0 < \phi' < 2\pi$. Il campo elettrostatico elementare generato dalla carica puntiforme dq' in un punto di osservazione generico $\underline{r}$ è

$$d\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') \quad (2)$$

¹Si ricordi che: $\int \frac{x dx}{(x^2 \pm b^2)^{3/2}} = -(x^2 \pm b^2)^{-1/2} + \text{const.}$

Poiché si chiede di calcolare il campo elettrostatico nel punto P individuato dal vettore posizione $\underline{r} = z\hat{z}$ si ha:

$$(\underline{r} - \underline{r}') = -\rho' \cos \phi' \hat{x} - \rho' \sin \phi' \hat{y} + z\hat{z} \quad (3)$$

$$|\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(\rho')^2 + z^2}. \quad (4)$$

Il campo totale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica superficiale nell'origine è quindi:

$$\underline{E}(z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho' \cos \phi' \hat{x} - \rho' \sin \phi' \hat{y} + z\hat{z}) \rho' d\rho' d\phi'}{[(\rho')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

Le tre componenti sono:

$$E_x(z) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{(\rho')^2}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' d\rho' = 0 \quad (6)$$

$$E_y(z) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{(\rho')^2}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' d\rho' = 0 \quad (7)$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{z\rho'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' d\rho' \quad (8)$$

Si osservi che l'integrazione delle componenti x e y del campo elettrostatico si annullano, come era logico attendersi dalla simmetria del problema.

Ricordando che $\int \frac{xdx}{(x^2 \pm b^2)^{3/2}} = -(x^2 \pm b^2)^{-1/2} + \text{const.}$, l'integrazione della componente lungo z da luogo al campo:

$$E_z(z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{z\rho'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' d\rho' \quad (9)$$

$$= \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} d\rho' \quad (10)$$

$$= -\frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left[(\rho')^2 + z^2 \right]^{-1/2} \Big|_a^{2a} = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + z^2}} \right] \quad (11)$$

La forza che agisce sulla carica q è quindi:

$$\underline{F} = \underline{E}(4a)q = \frac{\sigma_0 4aq}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 16a^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 16a^2}} \right] \hat{z} \quad (12)$$

$$= \frac{\sigma_0 2q}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{20}} \right] \hat{z} \cong 1000.016q\hat{z} \cong 0.001\hat{z} \quad \text{N} \quad (13)$$

Problema 2 (8 punti) Si consideri il circuito di figura 2, dove $R_1 = R$, $R_2 = 3R$ e $C_2 = 2C_1$ e $C_3 = 4C_1$. Durante il periodo di tempo $t < t_0$, l'interruttore viene lasciato nella posizione B fino alla condizione di equilibrio a regime. Dopo raggiunta al condizione di equilibrio, all'istante $t = t_0$ l'interruttore viene commutato nella posizione C con il condensatore C_3 scarico e, dopo un certo tempo (idealmente infinito) si realizza una nuova situazione di regime. Ricavare l'espressione della corrispondente variazione di carica ΔQ_2 sul condensatore C_2 in funzione di ΔV e C_1 , nel passare dalla condizione di equilibrio iniziale a quella finale.

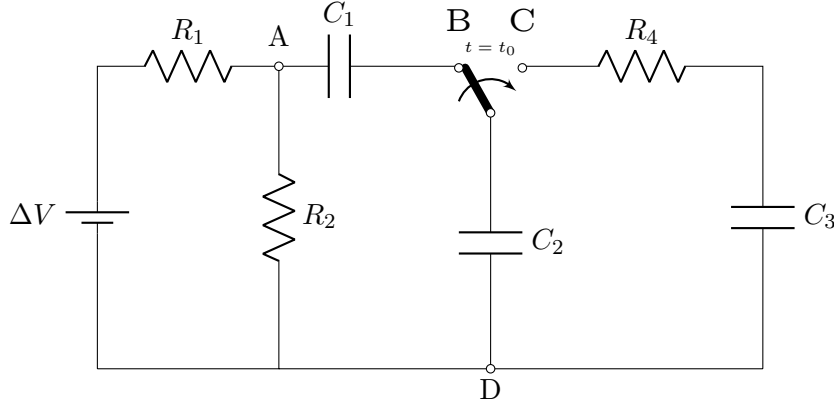


Figura 2: Circuito equivalente del problema 2

Soluzione del problema 2

Con l'interruttore in posizione B la differenza di potenziale ai capi del serie dei condensatori C_1 e C_2 a regime è equivalente alla caduta di potenziale ai capi della resistenza R_2 . La corrente I che circola a regime nelle due resistenze è

$$I = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2} \quad \text{V} \quad (14)$$

e quindi la differenza di potenziale è

$$\Delta V_{AD} = IR_2 = \frac{\Delta V R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\Delta V 3R}{R + 3R} = \frac{3\Delta V}{4} \quad \text{V} \quad (15)$$

La quantità di carica totale presente sulle armature della serie dei condensatori C_1 e C_2 prima della commutazione dell'interruttore è

$$Q^0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Delta V_{AD} = \frac{C_1 2C_1}{C_1 + 2C_1} \Delta V_{AD} = \frac{1}{2} C_1 \Delta V \quad \text{C} \quad (16)$$

Questa è anche la quantità di carica Q_2^0 che si deposita a regime sul condensatore C_2 , per cui $Q_2^0 = C_1 \Delta V / 2$.

Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene commutato nella posizione B . All'equilibrio, ai capi del parallelo tra C_2 , C_3 si ha la stessa differenza di potenziale ΔV_{CD} . Inoltre, per la legge di conservazione della carica, se indichiamo con Q_2^∞ e Q_3^∞ le cariche dei due condensatori all'equilibrio finale, si ha

$$Q_2^0 = Q_2^\infty + Q_3^\infty \quad \text{C} \quad (17)$$

La quantità di carica presente inizialmente sulle armature di C_2 si ridistribuisce anche sulle armature di C_3 . Indicando con $C_p = C_2 + C_3 = 6C_1$ La capacità totale del parallelo di condensatori, la differenza di potenziale finale ΔV_{CD} è:

$$\Delta V_{CD} = \frac{Q_2^0}{C_p} = \frac{\Delta V}{12} \quad \text{V} \quad (18)$$

Nota la differenza di potenziale ai capi dei condensatori C_1 e C_3 , la cariche risulteranno

$$Q_2^\infty = 2C_1 \Delta V_{CD} = 2C_1 \frac{\Delta V}{12} = C_1 \frac{\Delta V}{6} \quad \text{C} \quad (19)$$

$$Q_3^\infty = 4C_1 \Delta V_{CD} = 4C_1 \frac{\Delta V}{12} = C_1 \frac{\Delta V}{3} \quad \text{C} \quad (20)$$

$$(21)$$

La differenza di carica su C_2 è pari alla carica presente su C_3 in condizioni di equilibrio finale per cui:

$$\Delta Q_2 = C_1 \frac{\Delta V}{3} \quad \text{C} \quad (22)$$

Problema 3 (8 punti) Una spira piana di filo conduttore è formata da due semi-circonferenze di raggio $a = 0.3$ m collegati da due tratti rettilinei di lunghezza $3a$ come in figura 3. La spira è percorsa da una corrente stazionaria $I = 50$ A e si trova immersa in un campo magnetico uniforme di induzione $\underline{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$ [T].

- (5 punti) Calcolare il valore delle due componenti del campo di induzione magnetica sapendo che il momento meccanico che agisce sulla spira nella posizione di figura è $\underline{M} = 13\hat{x} - 9\hat{y}$ [N · m].
- (3 punti) Determinare modulo, direzione e verso della forza elettrica che agisce sul solo tratto CD della spira.

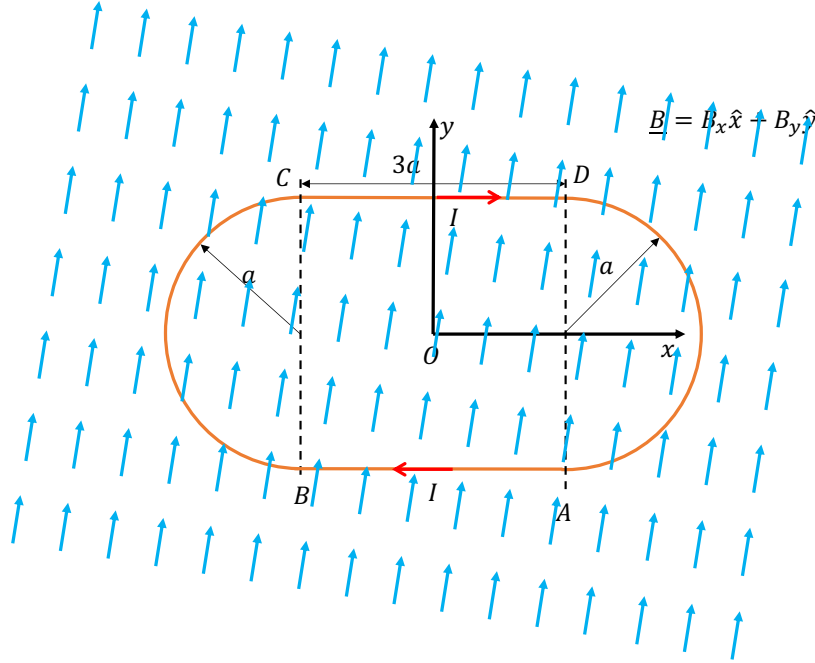


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il momento magnetico della spira è $\underline{m} = IS\hat{n}$ dove, nel caso in esame, $\hat{n} = -\hat{z}$ (regola della mano destra). L'area della superficie della spira è:

$$S = 6a^2 + \pi a^2 = a^2(6 + \pi) \quad \text{m}^2 \quad (23)$$

per cui il momento magnetico è

$$\underline{m} = -Ia^2(6 + \pi)\hat{z} \quad \text{A} \cdot \text{m}^2 \quad (24)$$

Il momento meccanico che agisce sulla spira è dato da $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$ da cui

$$\underline{M} = [-Ia^2(6 + \pi)\hat{z}] \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y}) \quad (25)$$

$$= Ia^2B_y(6 + \pi)\hat{x} - Ia^2B_x(6 + \pi)\hat{y} \quad \text{N} \cdot \text{m} \quad (26)$$

Confrontando con i dati del problema si ha

$$Ia^2B_y(6 + \pi) = 13 \quad (27)$$

$$Ia^2B_x(6 + \pi) = 9 \quad (28)$$

da cui si ricava $B_x \cong 0.219$ T e $B_y \cong 0.316$ T. Per il tratto CD , dall'espressione della forza di Lorentz, possiamo scrivere:

$$\underline{F}_{CD} = I3a(\hat{x}) \times (B_x\hat{x} + B_y\hat{y}) = B_yI3a\hat{z} \cong 14.22\hat{z} \quad \text{N} \quad (29)$$

Problema 4 (8 punti) Un circuito chiuso è formato da un solenoide a sezione rettangolare di lato $a = 0.2$ m e $b = 2a$ m, composto da $n = 20$ spire di filo conduttore a sezione circolare di raggio $r = 0.5$ mm e resistività $\rho = 982 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$. Il solenoide è tenuto in movimento in modo tale che il suo moto sia sempre rettilineo uniforme lungo $\hat{x}$ con velocità $\underline{v} = v_x \hat{x} = 2 \hat{x}$ m/sec parallela ai due lati maggiori e il suo asse sia costantemente parallelo all'asse z . All'istante $t = 0$ il solenoide entra nella regione $x > 0$ in cui è presente un campo non uniforme di induzione $\underline{B} = B_z x \hat{z}$ con $B_z = 0.3 \text{ T} \cdot \text{m}^{-1}$. Calcolare l'energia totale dissipata nel solenoide durante l'intervallo di tempo che questo impiega ad entrare completamente nel campo di induzione magnetica non uniforme.

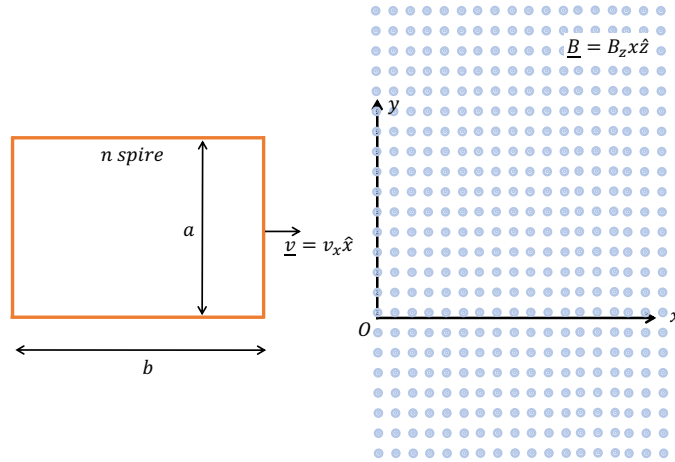


Figura 4: Geometria del problema 4

Soluzione al problema 4

Dal tempo $t = 0$ fino al tempo $t_1 = b/v_x$ il solenoide entra nella regione in cui è presente il campo di induzione magnetica. Si registra dunque un aumento del flusso del campo che attraversa la spira, e di conseguenza si produrrà, secondo la legge di Faraday, Neumann e Lenz, una f.e.m. che, essendo il circuito costituito da filo conduttore, farà circolare una corrente indotta $i(t)$. All'istante di tempo generico $0 < t < t_1$, il tratto $x(t)$ del lato maggiore del solenoide che sarà entrato nel campo di induzione magnetica è

$$x(t) = v_x t \quad \text{m} \quad (30)$$

Il flusso attraverso il solenoide composto da n spire all'istante t sarà dato da:

$$\Phi[\underline{B}, t] = n \int_0^a \int_0^{x(t)} \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{z} dx dy = n \int_0^a \int_0^{v_x t} B_z x dx dy = na B_z \frac{v_x^2 t^2}{2} \quad \text{Wb} \quad (31)$$

Il modulo della f.e.m. indotta all'istante t è

$$\mathcal{E}_i(t) = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = na B_z v_x^2 t = 4.8 t \quad \text{V} \quad (32)$$

Se indichiamo con $L = n(2a + 2b) = 6na$ m la lunghezza totale del filo conduttore che costituisce il solenoide, la resistenza totale R del filo è data da:

$$R = \frac{\rho L}{\pi r^2} = \frac{\rho 6na}{\pi r^2} \cong 30 \quad \Omega \quad (33)$$

La potenza elettrica dissipata sulla resistenza all'istante t è data da:

$$P(t) = \frac{[\mathcal{E}_i(t)]^2}{R} = \frac{n^2 a^2 B_z^2 v_x^4 t^2}{R} = 0.768 t^2 \quad \text{W} \quad (34)$$

La potenza dissipata è non è costante nel tempo quindi durante l'intervallo di tempo $t \in [0, t_1]$ sec. l'energia elettrica totale W dissipata per effetto Joule risulta

$$W = \int_0^{t_1} P(t) dt = \frac{n^2 a^2 B_z^2 v_x^4}{R} \int_0^{2a/v_x} t^2 dt = \frac{n^2 a^2 B_z^2 v_x^4}{R} \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{2a/v_x} \quad (35)$$

$$= \frac{n^2 a^2 B_z^2 v_x^4}{R} \frac{8a^3}{3v_x^3} = \frac{n^2 a^5 B_z^2 v_x}{R} \frac{8}{3} \cong 0.002 \quad \text{J} \quad (36)$$