

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

11 Luglio 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Una sfera conduttrice scarica di raggio R_1 è posizionata al centro di una cavià in aria ricavata in un guscio sferico concentrico ad essa, con raggio interno $R_2 = 2R_1$ e raggio esterno $R_3 = 4R_1$ (vedi figura 1). Nel volume del guscio sferico è distribuita una carica elettrica con densità volumetrica $\rho_v(r) = \alpha/r^2$ [C/m³], essendo r la distanza radiale dal centro e α una costante. Nell'ipotesi che sia $\alpha = 1.2773 \cdot 10^{-9}$ [C/m] si determini il potenziale a cui si trova la sfera conduttrice.

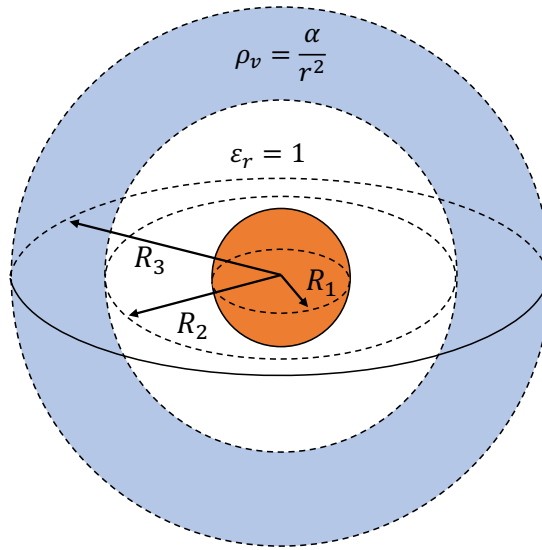


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

La sfera conduttrice è una regione equipotenziale per cui è sufficiente calcolare il potenziale su un qualsiasi punto della sua superficie. Vista la simmetria sferica si può calcolare il campo elettrico utilizzando il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie sferica di raggio r per i tre casi $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$ e $r > R_3$. Essendo il campo elettrico, per simmetria sferica diretto solo radialmente in tutti i punti della superficie sferica di raggio r , avremo per entrambi i casi

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

dove Q è la carica totale netta contenuta all'interno della superficie sferica di Gauss.

- 1) $R_1 < r < R_2$. La sfera è scarica per cui il campo elettrostatico in questa regione è nullo $E_0(r) = 0$.
- 2) $R_2 < r < R_3$. La carica totale contenuta all'interno della superficie sferica di Gauss è funzione del raggio di questa:

$$Q(r) = \iiint_V \rho(\underline{r}') dv' = \int_{R_2}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{(r')^2} (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' = \alpha 4\pi \int_{R_2}^r dr' = \alpha 4\pi (r - 2R_1) \quad (2)$$

La legge di Gauss assume la forma

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\alpha 4\pi(r - 2R_1)}{\epsilon_0} \quad (3)$$

da cui

$$\underline{E}_1(r) = \frac{\alpha(r - 2R_1)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{2R_1}{r^2} \right) \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4)$$

3) $r > R_2$. Sostituendo $r = R_3 = 4R_1$ nella espressione della carica totale (2) si ottiene:

$$Q = \alpha 4\pi(4R_1 - 2R_1) = \alpha 8\pi R_1 \quad (5)$$

e per quanto riguarda il campo elettrico in questa regione:

$$\underline{E}_2(r) = \frac{\alpha 8\pi R_1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{2\alpha R_1}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (6)$$

Poiché il campo elettrico è radiale la differenza di potenziale può essere calcolata integrando il campo elettrico statico lungo il percorso rettilineo che va dall' ∞ fino ad un punto A sulla superficie

$$V_A - V_\infty = - \int_\infty^A \underline{E}(r) \cdot d\underline{r} = - \int_{R_1}^{R_2} \underline{E}_0(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \underline{E}_1(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_3}^\infty \underline{E}_2(r) \cdot \hat{r} dr \quad (7)$$

$$(8)$$

La carica è confinata al finito per cui si ha $V_\infty = 0$. Inoltre, essendo $\underline{E}_0(r) = 0$, si può scrivere:

$$V_A = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_{2R_1}^{4R_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{2R_1}{r^2} \right) dr + \frac{\alpha}{\epsilon_0} \int_{4R_1}^\infty \frac{2R_1}{r^2} dr \quad (9)$$

$$= \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left\{ \ln r \Big|_{2R_1}^{4R_1} - \left(-\frac{2R_1}{r} \right) \Big|_{2R_1}^{4R_1} + \left(-\frac{2R_1}{r} \right) \Big|_{4R_1}^\infty \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left\{ [\ln(4R_1) - \ln(2R_1)] + \left(\frac{2R_1}{4R_1} - \frac{2R_1}{2R_1} \right) + \left(\frac{2R_1}{4R_1} \right) \right\} \quad (11)$$

$$= \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left\{ \left[\ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] + \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \quad (12)$$

$$= \frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln 2 \cong 100 \text{ V} \quad (13)$$

$$(14)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore piano, ideale, in aria di superficie quadrata di lato a e distanza tra le armature h viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale tra le due armature di $\Delta V_0 = V_1 - V_2$ [V], e quindi isolato. Successivamente viene introdotta una struttura a forma di parallelepipedo con la superficie della stessa forma e dimensione di quella del condensatore. La struttura è costituita da due strati di materiale dielettrico di altezza $h/2$ separati da una lamina di conduttore piano di spessore trascurabile. Il primo dielettrico, di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r1} = 4$, occupa il volume $b \times a \times h/2$ sopra la lamina mentre la parte rimanente di volume rimane in aria. Il secondo dielettrico, di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r2} = 2$, occupa il volume $c \times a \times h/2$ sotto la lamina mentre la parte rimanente, di volume rimane in aria (vedi figura), con $b = (1/3)a$ e $c = (2/3)a$. Determinare:

- (5 punti) il rapporto numerico $\Delta V_N / \Delta V_0$ dove ΔV_N è la differenza di potenziale tra le armature del condensatore dopo l'introduzione della struttura;
- (3 punti) il valore dell'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nella configurazione finale nell'ipotesi che sia $\Delta V_0 = 99.3$ V, $a = 0.1$ m ed $h = 4$ mm.

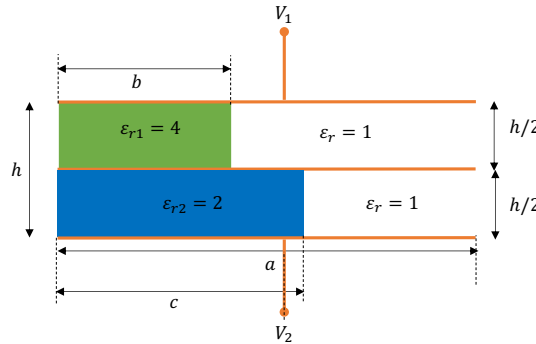


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

La capacità del condensatore piano nella fase iniziale è

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 a^2}{h} \quad (15)$$

La carica iniziale Q sulle armature del condensatore piano può essere calcolata ricordando che $Q = C_0 \Delta V_0$, da cui;

$$Q = \frac{\epsilon_0 a^2}{h} \Delta V_0 \quad (16)$$

Un volta introdotta la struttura la carica rimane invariata perché il condensatore è isolato. La nuova differenza di potenziale che si stabilisce tra le armature dipende dalla capacità del condensatore dopo l'introduzione della struttura. In questo caso il condensatore può essere visto come la serie di due condensatori, ognuno dei quali, a sua volta, può essere visto come il parallelo di due condensatori (vedi figura). Le capacità dei singoli condensatori sono

$$C_1^d = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} a b}{h/2} = \frac{\epsilon_0 8 a^2}{3 h} = \frac{8}{3} C_0 \quad (17)$$

$$C_1^0 = \frac{\epsilon_0 a(a-b)}{h/2} = \frac{\epsilon_0 4 a^2}{3 h} = \frac{4}{3} C_0 \quad (18)$$

$$C_2^d = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} a c}{h/2} = \frac{\epsilon_0 8 a^2}{3 h} = \frac{8}{3} C_0 \quad (19)$$

$$C_2^0 = \frac{\epsilon_0 a(a-c)}{h/2} = \frac{\epsilon_0 2 a^2}{3 h} = \frac{2}{3} C_0 \quad (20)$$

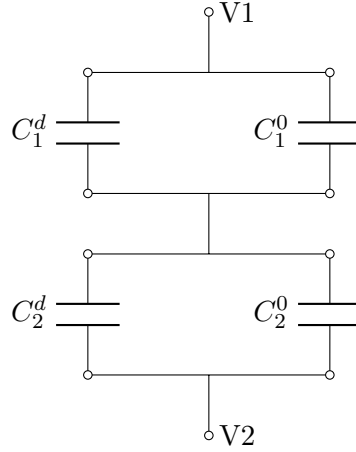


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

La capacità equivalente di due condensatori in parallelo è la somma delle capacità per cui si ha:

$$C_1 = C_1^d + C_1^0 = \frac{8}{3}C_0 + \frac{4}{3}C_0 = 4C_0 \quad (21)$$

$$C_2 = C_2^d + C_2^0 = \frac{8}{3}C_0 + \frac{2}{3}C_0 = \frac{10}{3}C_0 \quad (22)$$

La capacità della serie dei due condensatori C_1 e C_2 è

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{40C_0^2}{3(4C_0 + \frac{10}{3}C_0)} = \frac{20}{11}C_0 \quad (23)$$

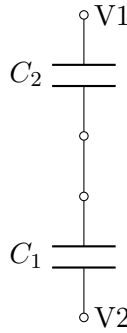


Figura 4: Circuito equivalente del problema 2

La differenza di potenziale ΔV_N nella configurazione finale è

$$\Delta V_N = \frac{Q}{C_T} = C_0 \Delta V_0 \cdot \frac{11}{20C_0} = \frac{11}{20} \Delta V_0 \quad (24)$$

e quindi il rapporto numerico è $\frac{\Delta V_N}{\Delta V_0} = 11/20$.

b)

L'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nella configurazione finale è

$$W = \frac{1}{2} C_T \Delta V_N^2 = \frac{1}{2} \frac{20}{11} \frac{\epsilon_0 a^2}{h} \left(\frac{11}{20} \Delta V_0 \right)^2 = \frac{11}{40} \frac{\epsilon_0 a^2}{h} \Delta V_0^2 \cong 60 \cdot 10^{-9} \text{ J} \quad (25)$$

Problema 3 (8 punti) Il circuito elettrico mostrato in figura è formato da un filo conduttore composto da tre tratti rettilinei MN , PQ ed ST e da tre archi di circonferenza con centro nell'origine del sistema di riferimento NP , QS e TM di raggi $R_3 = 4R_1$, $R_2 = 2R_1$ e $R_1 = 2.44$ cm, rispettivamente. I tratti MN e ST si trovano su due raggi dell'arco di circonferenza NP e sono inclinati fra loro di $\alpha = 45^\circ$, come mostrato in figura 5. Il circuito è percorso da una corrente stazionaria I . Sapendo che il campo di induzione magnetica totale misurato nell'origine è $\underline{B}(0) = -460.64 \cdot 10^{-6} \hat{z}$ T calcolare il valore della corrente I .

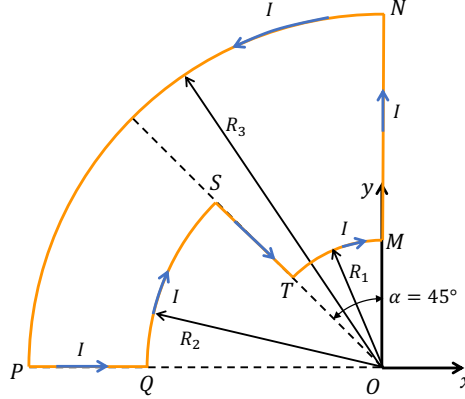


Figura 5: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il vettore induzione magnetica generato nell'origine del sistema di riferimento può essere calcolato utilizzando la prima formula di Laplace:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (26)$$

Consideriamo un qualsiasi elementino $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ posto sui tre tratti rettilinei MN , PQ ed ST . Poiché il punto di osservazione è nell'origine il contributo (26) è nullo perché i due vettori $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ sono paralleli. Di conseguenza il campo di induzione magnetica nell'origine sarà dato solo dalla corrente che scorre nei tre archi di circonferenza. Per quanto riguarda i tratti di circonferenza, si può verificare facilmente che il campo d'induzione magnetica generato nell'origine da un arco circolare di corrente costante con centro l'origine e apertura $\Delta\phi = (\phi_b - \phi_a)$ (rad.) e raggio R è ¹

$$\underline{B}(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_1} (\phi_b - \phi_a) (\pm \hat{z}) \quad (27)$$

dove il segno $\pm$ va scelto in accordo con il verso di percorrenza della corrente.

In base alla precedente equazione, il campo di induzione magnetica generato nell'origine dal tratto semicircolare NP di apertura $\Delta\phi = \pi/2$ e raggio R_3 è

$$\underline{B}_3(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_3} \frac{\pi}{2} \hat{z} = \frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_3} \hat{z} \quad (28)$$

Analogamente, il campo di induzione magnetica generato nell'origine dal tratto semicircolare QS di apertura $\Delta\phi = \pi/4$ e raggio R_2 è

$$\underline{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_2} \frac{\pi}{4} (-\hat{z}) = -\frac{\mu_0}{16} \frac{I}{R_2} \hat{z} \quad (29)$$

e il campo di induzione magnetica generato nell'origine dal tratto semicircolare TM di apertura $\Delta\phi = \pi/4$ e raggio R_1 è

$$\underline{B}_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_1} \frac{\pi}{4} (-\hat{z}) = -\frac{\mu_0}{16} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad (30)$$

¹es. soluzione al problema 3 della prova scritta del 14/2/2023.

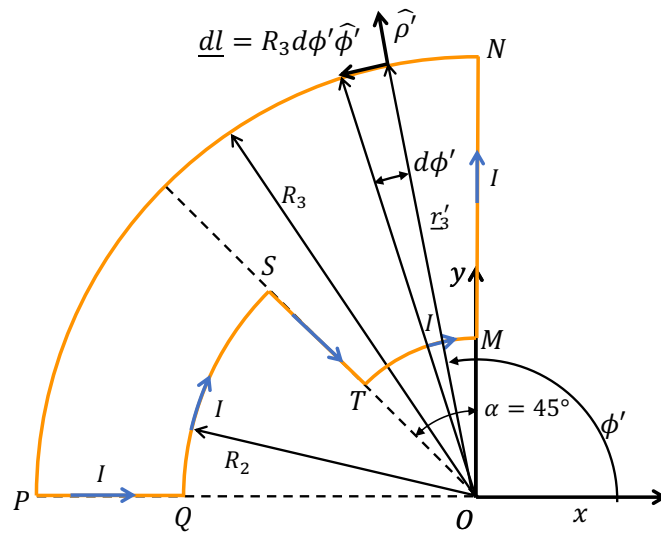


Figura 6: Geometria per il calcolo dei tratti curvilinei

Sommando vettorialmente i tre contributi, il campo di induzione totale nell'origine è:

$$\underline{B}_t(0,0) = \underline{B}_1(0,0) + \underline{B}_2(0,0) + \underline{B}_3(0,0) \quad (31)$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_3} - \frac{\mu_0}{16} \frac{I}{R_2} - \frac{\mu_0}{16} \frac{I}{R_1} \right] \hat{z} \quad (32)$$

$$= -\frac{\mu_0}{16} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad (33)$$

Risolvendo per I e considerando solo i moduli si ottiene:

$$I = \frac{16R_1}{\mu_0} |\underline{B}_t(0,0)| \quad (34)$$

da cui $I \cong 140$ A

Problema 4 (8 punti) Una bobina in aria, costituita da $N = 199$ spire quadrate compatte, di lato $a = 4$ cm. Il filo conduttore utilizzato per avvolgere la bobina è costituito da un materiale conduttore di conducibilità uniforme $\sigma = 4.054 \cdot 10^6 [\Omega \cdot m]^{-1}$ a sezione circolare di raggio $r = 0.5$ mm. La bobina è posta in una regione dello spazio dove è presente un campo di induzione magnetica $\underline{B}(t)$ uniforme, perpendicolare al piano della bobina (vedi figura 7a). Partendo da un valore nullo al tempo $t = 0$, il campo $\underline{B}(t)$ cresce sinusoidalmente nel tempo con legge $\underline{B}(t) = B_0 \sin(\omega t) \hat{z}$ fino al suo valore massimo $B_0 = 0.8$ T raggiunto al tempo $t_1 = 2$ sec per poi rimanere costante (vedi figura 7b). Trascurando i fenomeni di autoinduzione calcolare il massimo valore della corrente indotta nella bobina.

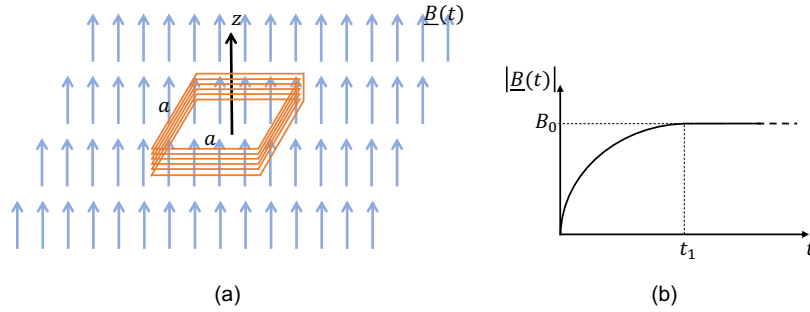


Figura 7: Geometria del problema 4 ed andamento nel tempo dell'ampiezza del vettore induzione magnetica

Soluzione del problema 4

Con riferimento alla figura 7a, la variazione nel tempo del campo di induzione magnetica $\underline{B}(t)$ è data da:

$$\underline{B}(t) = \begin{cases} B_0 \sin(\omega t) \hat{z} & \text{T} & 0 \leq t < t_1 \\ B_0 \hat{z} & \text{T} & t \geq t_1 \end{cases} \quad (35)$$

Poiché il campo di induzione magnetica è uniforme e perpendicolare alla sezione di ogni spira, il flusso totale concatenato con la bobina nei due intervalli di tempo considerati è :

$$\Phi(t) = \begin{cases} Na^2 B_0 \sin(\omega t) & \text{Wb} & 0 \leq t < t_1 \\ Na^2 B_0 & \text{Wb} & t \geq t_1 \end{cases} \quad (36)$$

Dove t denota il tempo trascorso dall'inizio del fenomeno. Conseguentemente l'ampiezza della forza elettromotrice indotta nel circuito sarà:

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \begin{cases} Na^2 B_0 \omega \cos(\omega t) & \text{V} & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & \text{V} & t \geq t_1 \end{cases} \quad (37)$$

La forza elettromotrice indotta assume il suo massimo valore $|\mathcal{E}_i(t)|_{max} = Na^2 B_0 \omega$ per $\omega t = 0$. L'istante di tempo in cui si ha il massimo del campo di induzione è dato dalla relazione $\omega t_1 = \pi/2$ da cui si ottiene $\omega = \pi/(2t_1)$. Sostituendo i valori si ottiene $|\mathcal{E}_i(t)|_{max} = |\mathcal{E}_i(0)| \cong 0.2$ V.

La lunghezza totale del filo conduttore che costituisce la spira è $l = N4a = 31.84$ m e l'area della sua sezione circolare è $S = \pi a^2 \cong 0.7854$ mm². La resistenza totale del filo è quindi:

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S} \cong 10 \Omega \quad (38)$$

Corrispondentemente, il massimo valore di corrente indotta è

$$|I_i(t)|_{max} = |I_i(0)| = \frac{Na^2 B_0 \omega}{R} \cong 0.02 \text{ A} \quad (39)$$