

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

1 Settembre 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Una carica positiva è distribuita lungo un filo isolante piegato in modo da formare una semicirconferenza, come in figura 1. La semicirconferenza, di raggio $a = 0.35$ m, giace sul piano $z = 0$ ed ha centro nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. La densità lineare di carica è descritta dalla espressione $\lambda = \lambda_0 \sin \phi'$, dove ϕ' è una coordinata angolare, che cresce da x verso y ed è nulla in corrispondenza dell'asse x , e λ_0 [C/m] una costante. Sapendo che la carica totale Q distribuita sul filo è $Q = 3.5 \cdot 10^{-6}$ [C], determinare:

- (3 punti) il valore della costante λ_0 ;
- (5 punti) la forza totale che si esercita su una carica $Q_1 = 1.983 \cdot 10^{-9}$ [C] posta nel centro della semicirconferenza.

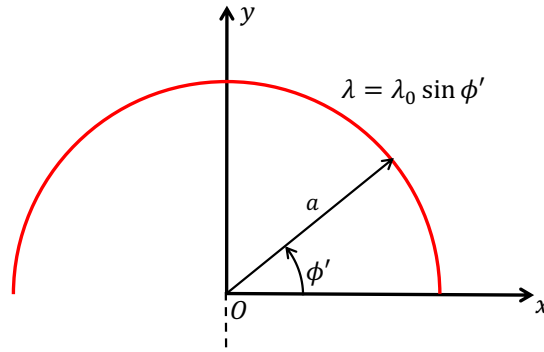


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a) Consideriamo la distribuzione lineare di densità di carica $\lambda = \lambda_0 \sin \phi'$. Utilizzando la coordinata angolare ϕ' , il tratto infinitesimo di circonferenza dl' , su cui è localizzata la carica infinitesima $dq = \lambda dl'$ può essere espresso da

$$dl' = a d\phi' \quad (1)$$

mentre il vettore $\underline{r}'$ che individua la posizione di tale carica infinitesima, utilizzando la coordinata angolare ϕ' , è:

$$\underline{r}' = a \cos \phi' \hat{x} + a \sin \phi' \hat{y} \quad (2)$$

La carica totale Q si ottiene integrando la carica elementare $dq = \lambda_0 \sin \phi' a d\phi'$ lungo tutta la semicirconferenza:

$$Q = \int_0^\pi a \lambda_0 \sin \phi' d\phi' = 2a \lambda_0 \quad C \quad (3)$$

Dalla precedente si ricava:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{2a} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m} \quad (4)$$

b) Il contributo di campo elettrico elementare nell'origine dovuto alla carica elementare $dq = \lambda dl'$ posizionata in $\underline{r}'$ è:

$$d\underline{E}(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 \sin \phi' a d\phi'}{a^3} (-a \cos \phi' \hat{x} - a \sin \phi' \hat{y}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 \sin \phi' d\phi'}{a} (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (5)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo elettrico totale nell'origine è dovuto alla sovrapposizione di tutti i contributi elementari per $0 < \phi' < \pi$. Osserviamo che la distribuzione di carica è simmetrica rispetto all'asse y . Consideriamo quindi due cariche elementari simmetriche dq_1 e dq_2 rispetto a y , e indichiamo con $d\underline{E}_1$ e $d\underline{E}_2$ i vettori campi elettrici che queste generano nell'origine. Poiché le due cariche elementari hanno ugual valore, il modulo dei due vettori campi elettrici è lo stesso. Con riferimento alla figura 2, si osserva che i due campi elettrici elementari possono essere scomposti entrambi in due componenti, una lungo l'asse x e l'altra lungo l'asse y (negativa). Data l'orientazione delle componenti e il loro modulo, il campo elettrico totale risultante dalla somma dei due avrà solo una componente lungo l'asse y mentre quella lungo l'asse x sarà nulla. Il campo elettrico totale data dalla sovrapposizione di tutti i contributi sarà

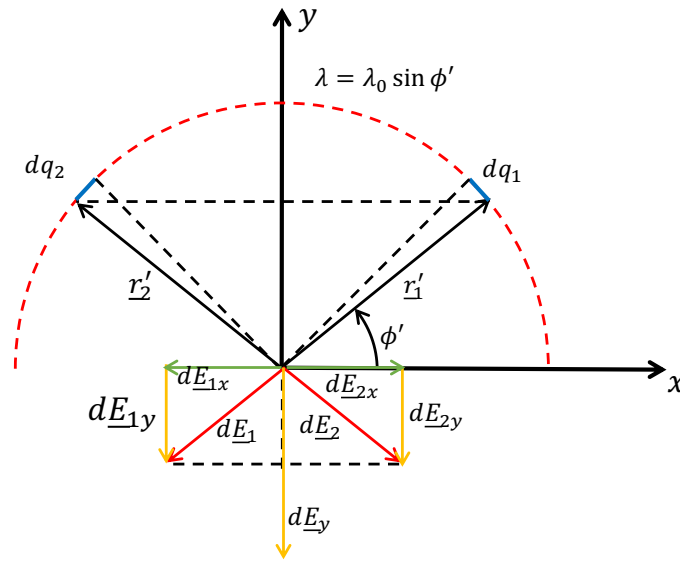


Figura 2: Geometria del problema 1

quindi derivabile come

$$\underline{E}(0,0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\lambda_0 \sin \phi' d\phi'}{a} (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) \quad (6)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{a} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi' d\phi' \hat{y} \quad (7)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{a} \frac{\pi}{2} \hat{y} \cong -2.01684 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (8)$$

La forza totale $\underline{F}$ che si esercita sulla carica Q_1 è quindi:

$$\underline{F} = \underline{E}(0,0)Q_1 \cong -4 \cdot 10^{-4} \hat{y} \quad \text{N} \quad (9)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore cilindrico, ideale, a sezione circolare, posto in posizione verticale di altezza totale $L = 20$ cm è costituito da un'armatura interna cilindrica di raggio $a = 4$ mm e una cilindrica esterna di raggio $b = 5$ mm. Il condensatore, inizialmente vuoto (in aria), viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale $\Delta V_0 = 50$ V tra le due armature e quindi isolato. Successivamente l'interno del condensatore viene riempito per una certa altezza h di olio minerale di costante dielettrica $\epsilon_r = 2.5$. Alla fine del processo si misura una differenza di potenziale ΔV_f . Si ricavi sia l'espressione finale dell'altezza h dell'olio minerale nel condensatore in funzione delle quantità $L, \epsilon_r, \Delta V_0, \Delta V_f$ che il valore di h quando si misura $\Delta V_f = 23.53$ V.

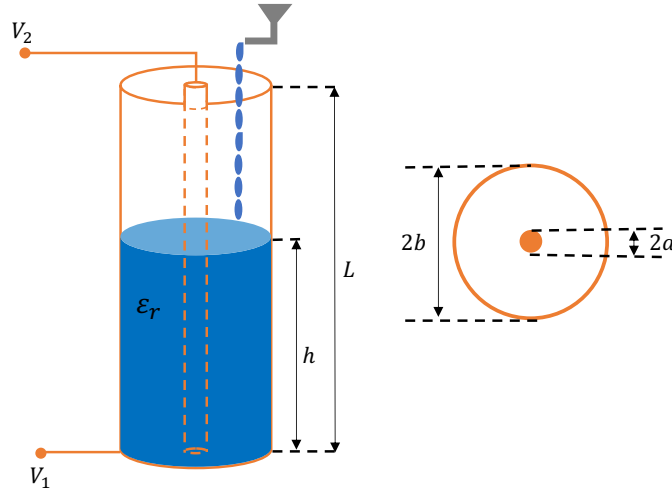


Figura 3: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

La capacità del condensatore senza liquido (in aria) è

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (10)$$

Alla fine del processo di carica con il condensatore vuoto sulle armature è presente una carica totale

$$Q_i = C_0 \Delta V_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Delta V_0 \quad (11)$$

Alla fine di questa prima fase il condensatore viene isolato. Successivamente il condensatore viene parzialmente riempito fino ad un'altezza h con un liquido di costante dielettrica ϵ_r . Alla fine di questa seconda fase il condensatore può essere visto come il parallelo di due condensatori cilindrici in parallelo (vedi figura 4) di cui uno in aria di altezza $(L - h)$ e uno con dielettrico di altezza h . La capacità del condensatore con il

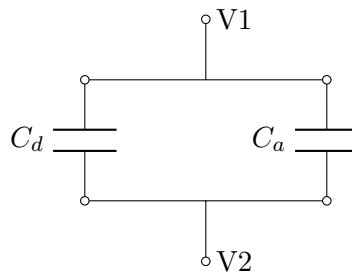


Figura 4: Circuito equivalente del problema 2

dielettrico presente per un'altezza h è

$$C_d = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (12)$$

mentre la capacità della parte restante in aria è

$$C_a = \frac{2\pi\epsilon_0(L-h)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (13)$$

Poiché il condensatore è isolato la carica sul condensatore totale rimane la stessa ma la capacità totale diventa:

$$C_t = C_d + C_a = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2\pi\epsilon_0(L-h)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (14)$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} [L + h(\epsilon_r - 1)] \quad \text{F} \quad (15)$$

Poiché la carica è la stessa, indicando con ΔV_f la differenza di potenziale ai capi delle armature alla fine della seconda fase possiamo scrivere l'uguaglianza:

$$C_t \Delta V_f = C_0 \Delta V_0 \quad (16)$$

da cui si ottiene:

$$[L + h(\epsilon_r - 1)] \Delta V_f = L \Delta V_0 \quad (17)$$

Risolvendo per h :

$$h = \frac{L(\Delta V_0 - \Delta V_f)}{(\epsilon_r - 1)\Delta V_f} \quad \text{m} \quad (18)$$

Infine, sostituendo i valori, si ottiene $h = 15 \text{ cm}$.

Problema 3 (8 punti) Nel vuoto, un conduttore cilindrico di raggio $a = 1$ cm, idealmente infinito ed asse di simmetria coincidente con l'asse z , è percorso dalla corrente stazionaria con densità uniforme su tutta la sezione $\underline{J}_1 = -286.5\hat{z}$ [A/m²]. Un secondo conduttore cilindrico cavo di raggio interno $b = 3a$ e raggio esterno $c = 4a$ idealmente infinito con asse z è posizionato concentricamente al primo ed è percorso dalla corrente stazionaria con densità uniforme su tutta la sezione $\underline{J}_2 = 200.1\hat{z}$ [A/m²]. Determinare il vettore induzione magnetica $\underline{B}(\rho, \phi)$ nei punti di coordinate cilindriche $(\rho_1, \phi_1) = [(b+a)/2, 0]$ e $(\rho_2, \phi_2) = [(c+a), 0]$.

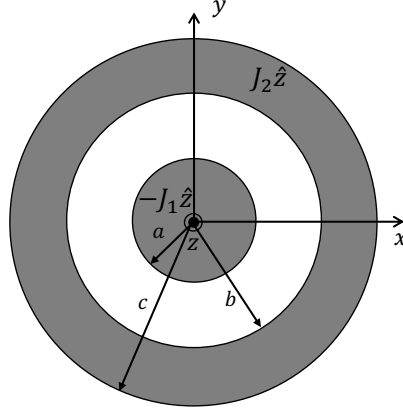


Figura 5: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il teorema della circuitazione di Ampere nel vuoto afferma che la circuitazione del vettore induzione magnetica lungo un cammino chiuso orientato Γ che costituisce il bordo di una superficie aperta S dipende solo dalle correnti di conduzione che attraversano la superficie S secondo la relazione.

$$\oint_{\Gamma} \underline{B}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \mu_0 \iint_S \underline{J}(\underline{r}') \cdot \hat{n} ds' \quad (19)$$

Data la natura bidimensionale del problema, consideriamo un sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) come in figura 6. Poichè la corrente è uniforme in entrambi i conduttori il problema possiede una simmetria

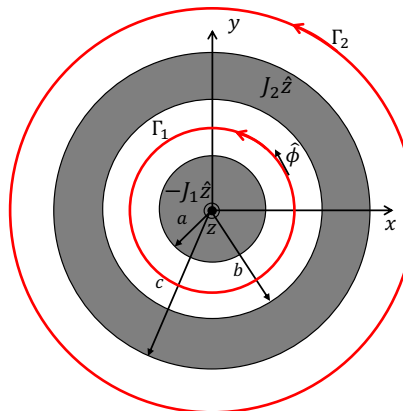


Figura 6: Geometria del problema 3

circolare (indipendente da ϕ quando $\rho = \text{costante}$). Di conseguenza, se consideriamo un qualsiasi cammino circolare di centro l'origine, su tutti i punti di questo cammino il vettore induzione magnetica è costante ed orientato tangenzialmente al cammino.

Consideriamo quindi un cammino chiuso Γ_1 circolare orientato come in figura di raggio $\rho_1 = (b+a)/2 = 2a$. In questo caso il punto di osservazione generico $P = (\rho, \phi)$ si trova nell'intercapedine tra i due conduttori.

Data la simmetrica circolare, il vettore induzione magnetica $\underline{B}(\rho_1, \phi)$ in tutti punti del cammino è costante in modulo e diretto tangenzialmente alla circonferenza Γ_1 . Rispetto al sistema di riferimento cilindrico il campo magnetico è esprimibile come

$$\underline{B}(\rho_1, \phi) = B_\phi(\rho_1) \hat{\phi} \quad \text{T} \quad (20)$$

Applicando il teorema della circuitazione di Ampere (19) e tenendo conto del verso della densità di corrente si ha:

$$B_\phi(3a)2\pi 3a = \mu_0 \iint_{S_1} J_1(-\hat{z}) \cdot \hat{z} ds' = -\mu_0 J_1 \pi a^2 = -\mu_0 I_1 \quad (21)$$

Dato che J_1 è uniforme sulla sezione $I_1 = J_1 \pi a^2 = 0.09$ A. Dalla precedente si ottiene:

$$\underline{B}(3a) = -\mu_0 \frac{J_1 a}{6} \hat{\phi} \cong -0.9 \cdot 10^{-6} \hat{\phi} \quad \text{T} \quad (22)$$

Consideriamo invece un cammino chiuso Γ_2 circolare orientato come in figura di raggio $\rho_2 = (c + a) = 5a$. Data la simmetrica circolare, anche in questo caso il vettore induzione magnetica $\underline{B}(\rho_2, \phi)$ in tutti punti del cammino è costante in modulo e diretto tangenzialmente alla circonferenza Γ_2 . Rispetto al sistema di riferimento cilindrico il campo magnetico è esprimibile come

$$\underline{B}(\rho_2, \phi) = B_\phi(\rho_2) \hat{\phi} \quad \text{T} \quad (23)$$

Nell'applicazione del teorema della circuitazione di Ampere (19) si deve adesso tenere conto che le densità di correnti che attraversano una qualsiasi superficie S_2 (esempio quella piana) che ha come bordo orientato Γ_2 sono J_1 e J_2 . Tenendo conto del verso della densità di corrente e che queste sono uniformi sulle sezioni si ha:

$$B_\phi(5a)2\pi 5a = \mu_0 \iint_{S_2} J_1(-\hat{z}) \cdot \hat{z} ds' + \mu_0 \iint_{S_2} J_2(\hat{z}) \cdot \hat{z} ds' = \mu_0(I_2 - I_1) \quad (24)$$

$$(25)$$

dove, essendo J_2 uniforme sulla sezione, $I_2 = J_2 \pi (c^2 - b^2) = 0.44$ A. Dalla precedente si ottiene:

$$\underline{B}(5a) = \mu_0 \frac{a(7J_2 - J_1)}{10} \hat{\phi} \cong 1.4 \cdot 10^{-6} \hat{\phi} \quad \text{T} \quad (26)$$

Problema 4 (8 punti) Una spira circolare di raggio $b = 20a$, percorsa da una corrente costante $I_1 = 47.2$ A orientata come in figura 7, giace sul piano $x-y$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con centro nell'origine. Una seconda piccola spira circolare, complanare con la prima, di resistenza totale $R = 20 \Omega$ e raggio $a = 2$ cm giace con il centro posto sull'asse z . La piccola spira si muove di moto traslatorio lungo l'asse z con velocità costante $\underline{v} = 0.1\hat{z}$ [m/sec]. Nell'ipotesi che il campo di induzione magnetica prodotto dalla spira di raggio b sia costante su tutto il piano della spira di raggio a e che all'istante iniziale la piccola spira si trovi con il centro nell'origine del sistema di riferimento, determinare il valore e il senso di percorrenza (rispetto all'asse z) della corrente indotta nella piccola spira al tempo $t = 2$ sec.

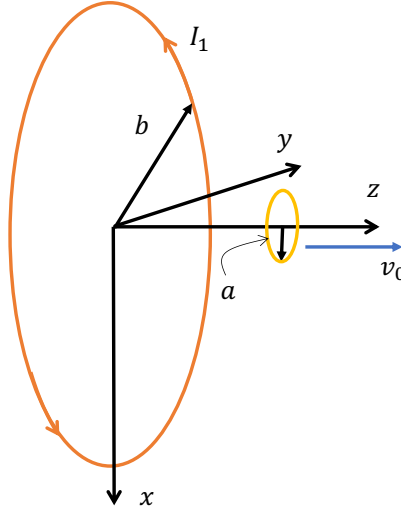


Figura 7: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

Il campo di induzione magnetica generato dalla spira di raggio b sull'asse ad una distanza z sull'asse è ricavabile dalla seconda legge di Laplace ed è dato da:

$$\underline{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (27)$$

Considerando il campo magnetico costante su tutto il piano della spira a distanza z , il flusso totale concatenato con la seconda spira è:

$$\Phi(z) = \underline{B}(z) \cdot \hat{n}S = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \cdot \hat{n}(\pi a^2) \quad (28)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \pi a^2 \quad \text{Wb} \quad (29)$$

Poiché il moto è uniforme, considerando che all'istante di tempo $t = 0$ la spira si trova con il centro in O , all'istante di tempo generico $t > 0$ la spira si trova ad una distanza $z(t) = v_0 t$ dal centro O . Il flusso varia quindi nel tempo secondo la legge:

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 b^2 \pi a^2}{[b^2 + (v_0 t)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Wb} \quad (30)$$

Il modulo della forza elettromotrice indotta nella seconda spira è data da

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 b^2 \pi a^2 3v_0^2 t}{[b^2 + (v_0 t)^2]^{\frac{5}{2}}} \quad \text{V} \quad (31)$$

L'intensità della corrente nella spira di raggio a , al tempo generico t è

$$|I_i(t)| = \frac{|\mathcal{E}_i(t)|}{R} = \frac{\mu_0}{2R} \frac{I_1 b^2 \pi a^2 3 v_0^2 t}{[b^2 + (v_0 t)^2]^{\frac{5}{2}}} \text{ A} \quad (32)$$

Al tempo $t = 2$ si ha quindi $|\mathcal{E}_i(2)| \cong 2 \cdot 10^{-8} \text{ V}$, e $|I_i(2)| \cong 1 \cdot 10^{-9} \text{ A}$. Poiché il flusso diminuisce nel tempo, il verso di percorrenza della corrente è *antiorario* rispetto alla normale $\hat{z}$