

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

18 Settembre 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Un nastro isolante, di spessore infinitesimo, è piegato a forma di corona semi-circolare, ed è posto sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano con centro nell'origine (vedi figura 1). I raggi interno ed esterno del nastro sono rispettivamente $a = 4$ [cm] e $b = 2a$. Sul nastro è distribuita una densità superficiale di carica uniforme positiva $\sigma^+ = \sigma = 2.97 \cdot 10^{-6}$ [C/m²] per $0 < \phi' < \pi/2$ e negativa $\sigma^- = -\sigma$ per $\pi/2 < \phi' < \pi$, dove ϕ' è la coordinata angolare del sistema di riferimento cilindrico associato al sistema di riferimento cartesiano. Determinare modulo, direzione e verso della forza elettrica che subisce una carica puntiforme di valore $q = -1.081 \cdot 10^{-6}$ [C] quando si trova nell'origine del sistema di riferimento;

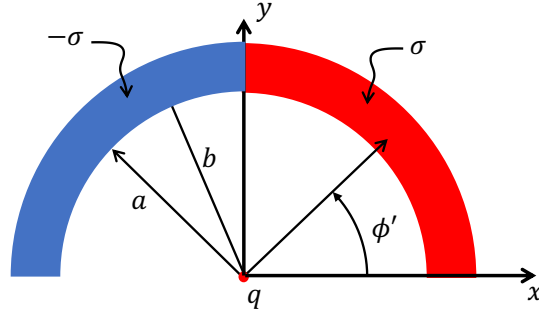


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Consideriamo il sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) associato al sistema di riferimento cartesiano. Un generico punto sorgente sul nastro carico può essere univocamente determinato dal vettore posizione $\underline{r}' = \rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y}$. L'areola elementare posta in $\underline{r}'$ espressa in coordinate cilindriche è $ds' = \rho' d\rho' d\phi'$. A questa areola è associata una carica puntiforme

$$dq'(\underline{r}') = \sigma^\pm ds' = \sigma^\pm \rho' d\rho' d\phi' \quad (1)$$

dove $a < \rho' < b$ e $0 < \phi' < \pi$. Il campo elettrostatico elementare generato dalla carica puntiforme dq' in un punto di osservazione generico $\underline{r}$ è

$$d\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') \quad (2)$$

Se il punto di osservazione si trova nell'origine $\underline{r} = 0$, $(\underline{r} - \underline{r}') = -(\rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y})$ e $|\underline{r} - \underline{r}'| = \rho'$. Il campo totale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica superficiale nell'origine è quindi la sovrapposizione di tutti i contributi dovuti alla distribuzione di carica positiva:

$$\underline{E}^+(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \rho' (-\rho' \cos \phi' \hat{x} - \rho' \sin \phi' \hat{y})}{(\rho')^3} d\phi' d\rho' \quad \frac{V}{m} \quad (3)$$

e di quelli dovuti alla distribuzione di carica negativa:

$$\underline{E}^-(0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(-\sigma)\rho'(-\rho' \cos \phi' \hat{x} - \rho' \sin \phi' \hat{y})}{(\rho')^3} d\phi' d\rho' \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4)$$

Risolvendo si ottiene:

$$\underline{E}^+(0) = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y})}{\rho'} d\phi' d\rho' \quad (5)$$

$$-\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{d\rho'}{\rho'} (\hat{x} + \hat{y}) = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) (\hat{x} + \hat{y}) \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (6)$$

$$\underline{E}^-(0) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y})}{\rho'} d\phi' d\rho' \quad (7)$$

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{d\rho'}{\rho'} (\hat{x} + \hat{y}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) (\hat{y} - \hat{x}) \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (8)$$

Sommando i contributi e tenendo conto che $b = 2a$ si ottiene:

$$\underline{E}(0) = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(2) \hat{x} \cong -3.7 \cdot 10^4 \hat{x} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (9)$$

La forza che agisce sulla carica q è quindi:

$$\underline{F} = \underline{E}(0)q = -\frac{\sigma q}{2\pi\epsilon_0} \ln(2) \hat{x} \cong 0.04 \hat{x} \quad \text{N} \quad (10)$$

Problema 2 (8 punti) Si consideri una sfera conduttrice di raggio esterno $R_a = 1$ cm su cui è presente una carica Q . Esternamente alla sfera, ma concentrici con essa, sono presenti un guscio sferico di materiale conduttore di spessore trascurabile e un guscio di materiale dielettrico lineare, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2$ (vedi figura 2). Il guscio sferico conduttore ha raggio $R_b = 2R_a$ mentre il guscio dielettrico ha raggio interno $R_c = 3R_a$ ed esterno $R_f = 6R_a$. Sapendo che il potenziale a cui si trova il guscio sferico conduttore esterno alla sfera è $V(R_b) = 1.5 \cdot 10^6$ [V], calcolare il valore della carica Q presente sulla sfera.

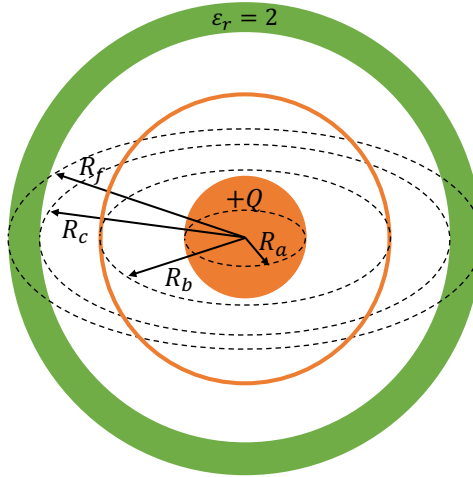


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

Il guscio conduttore sferico di raggio R_b è una regione equipotenziale per cui il potenziale può essere calcolato su un punto qualsiasi posto sulla superficie del conduttore stesso. Il calcolo del potenziale richiede anzitutto la determinazione del campo elettrostatico presente esternamente al guscio conduttore, sia nelle regioni dielettriche che in aria.

Data la simmetria sferica del problema, è possibile determinare l'espressione della componente radiale D_r^d del vettore induzione elettrica all'interno della regione di dielettrico utilizzando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici.

Considerando una superficie sferica di raggio $R_c < r < R_f$ si ha:

$$D_r^d 4\pi r^2 = Q \quad (11)$$

Il vettore induzione elettrica $\underline{D}^d(r)$ all'interno del guscio dielettrico è quindi:

$$\underline{D}^d(r) = D_r^d \hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (12)$$

essendo $\hat{r}$ un versore diretto radialmente rispetto al centro. Per un dielettrico omogeneo, isotropo, lineare si ha in tutti i punti interni al dielettrico $\underline{D}^d(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}^d(r)$. Quindi il campo elettrico all'interno del primo guscio dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}^d(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (13)$$

Per quanto riguarda il campo elettrico in aria presente sia nella intercapedine tra il guscio conduttore e la guaina dielettrica che esternamente alla guaina, sempre sfruttando la simmetria sferica del problema ed applicando il teorema di Gauss ad due superfici sferiche di raggio $R_b < r < R_c$ e $r > R_f$ si ottiene facilmente:

$$\underline{E}^0(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (14)$$

Il potenziale $V(R_b)$ a cui si trova il conduttore si calcola integrando il lavoro elementare $-\underline{E}(r) \cdot \underline{dl}$ che si compie contro le forze del campo per spostare una carica positiva unitaria di un tratto $\underline{dl}$, lungo un cammino rettilineo radiale che si estende dall'infinito fino alla superficie del guscio conduttore:

$$V(R_b) = \int_{R_b}^{R_c} \underline{E}^0(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_c}^{R_f} \underline{E}^d(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_f}^{\infty} \underline{E}^0(r) \cdot \hat{r} dr \quad (15)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{R_b}^{R_c} \frac{1}{r^2} dr + \frac{1}{\epsilon_r} \int_{R_c}^{R_f} \frac{1}{r^2} dr + \int_{R_f}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \right] \quad (16)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_b}^{R_c} + \frac{1}{\epsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_c}^{R_f} + \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_f}^{\infty} \right\} \quad (17)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_c} \right) + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_f} \right) + \frac{1}{R_f} \right] \quad \text{V} \quad (18)$$

Sostituendo i valori:

$$V(R_b) = \frac{5Q}{48\pi\epsilon_0 R_a} \quad \text{V} \quad (19)$$

da cui

$$Q = \frac{48\pi\epsilon_0 R_a}{5} V(R_b) \cong 4.00 \cdot 10^{-6} \quad \text{C} \quad (20)$$

Problema 3 (8 punti) Nel vuoto, un nastro metallico piano di spessore infinitesimo, larghezza w [m], e idealmente infinito è disposto sul piano xy con $y > 0$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con un lato coincidente con l'asse x come in figura 3. Il nastro metallico è percorso da una corrente elettrica costante e uniformemente distribuita sulla superficie del nastro, con densità superficiale $\underline{J}_S = (I/w)\hat{x}$ [A/m], dove con I [A] si è indicata la corrente totale sul nastro. Si calcoli l'espressione esplicita del vettore induzione magnetica $\underline{B}$ nel punto di coordinate $P = (0, 2w, 0)$.

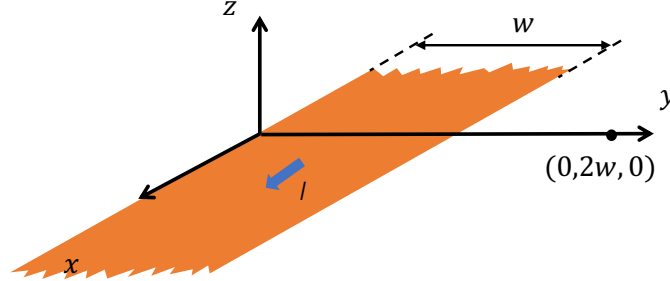


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Ricordiamo che il campo di induzione magnetica $\underline{B}(P)$ generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente stazionaria I su un qualunque punto P di un piano perpendicolare al filo è dato dalla formula di Biot-Savart:

$$\underline{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{t} \quad (21)$$

dove R è la distanza del punto sul piano dal filo e $\hat{t}$ è il versore in P sul piano tangente alla circonferenza di raggio R .

L'effetto complessivo del nastro percorso da corrente I può essere ottenuto sovrapponendo gli effetti elementari di infinite strisce parallele, di larghezza dy , in cui si può pensare decomposto il nastro (vedi figura 4). Ogni striscia elementare equivale a un filo rettilineo infinito, il cui contributo $d\underline{B}$ al campo prodotto dal nastro è dato dalla relazione di Biot-Savart (21). La corrente infinitesima dI che corre lungo la striscia elementare dy' a causa della distribuzione uniforme della corrente I , vale

$$dI = \underline{J}_S \cdot dy' \hat{x} = \frac{I}{w} dy' \quad (22)$$

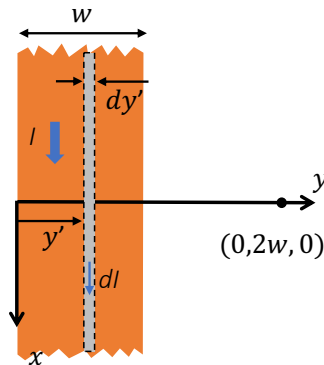


Figura 4: Rappresentazione del nastro di corrente come successione di strisce infinitesime rettilinee infinite di corrente dI

Con riferimento alla (21), il contributo infinitesimo $d\mathbf{B}$ al vettore induzione magnetica dovuto a questa striscia elementare in un punto generico di osservazione $\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}}$ con $y > w$ può essere scritto come¹:

$$d\mathbf{B}(y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{|y - y'|} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Idy'}{w(y - y')} \hat{\mathbf{z}} \quad (23)$$

Il campo totale d'induzione magnetica si ottiene integrando i contributi infinitesi dovuti alla distribuzione di corrente sul nastro:

$$\mathbf{B}(y) = \int_0^w \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Idy'}{w(y - y')} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{w} \int_0^w \frac{dy'}{(y - y')} \hat{\mathbf{z}} \quad (24)$$

La primitiva di $f(y') = 1/(y - y')$ è $p(y') = -\ln(y - y')$ per cui risolvendo l'integrale si ottiene:

$$\mathbf{B}(y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{w} \ln \left[\frac{y}{y - w} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (25)$$

Nel punto di coordinate $(0, 2w, 0)$ si ottiene:

$$\mathbf{B}(2w) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{w} \ln(2) \hat{\mathbf{z}} \quad (26)$$

¹Poiché $y > w$ ed $y' \leq w \Rightarrow (y - y') > 0 \quad \forall y$ per cui $|y - y'| = (y - y')$

Problema 4 (8 punti) Una sbarra conduttrice rigida si appoggia su due binari conduttori rettilinei paralleli all'asse x di un sistema di riferimento cartesiano. I due binari sono collegati elettricamente in corrispondenza dell'asse y da un conduttore rettilineo di lunghezza a e resistenza totale R , come mostrato in figura 5. La sbarra, partendo dal punto $x = 0$ viene fatta muovere con velocità costante $\underline{v}_0 = v_0 \hat{x}$ rimanendo sempre parallela all'asse y . Tutto il sistema è immerso in un campo di magnetostatico *non uniforme* di induzione magnetica $\underline{B} = Cx^2 \hat{z}$ [T] uscente dal foglio, che si estende da $x = 0$ a $x = L$. Nell'ipotesi che sia $a = 20$ [cm], $L = 20$ [cm], $R = 30$ [Ω], $C = 61.77$ [T/m²] e $v_0 = 0.3$ [m/s], calcolare l'energia totale che si dissipa per effetto Joule sulla resistenza R .

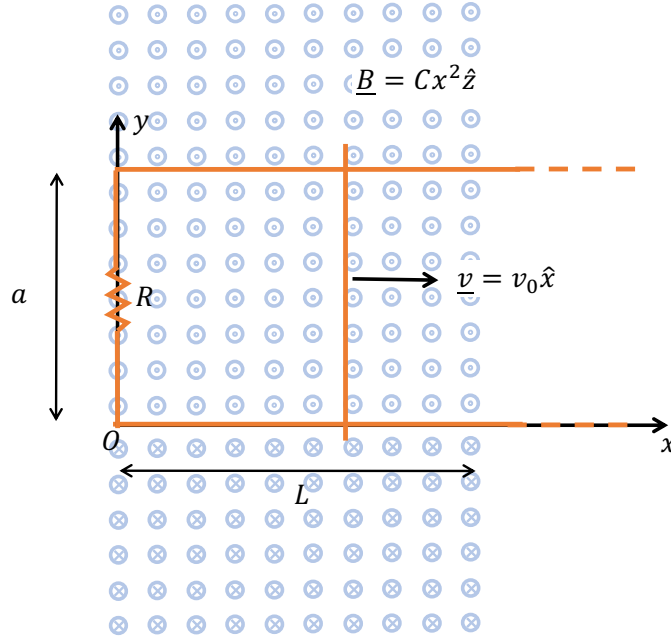


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

La posizione della sbarra $x(t)$ rispetto all'asse x durante il moto è data dalla legge

$$x(t) = v_0 t \quad (27)$$

Dalla coordinata $x = 0$ fino a $x = L$ il campo di induzione magnetica aumenta la propria intensità quadraticamente con la distanza dall'origine. Poiché il campo $\underline{B}(\underline{r})$ non è uniforme sulla area spazzolata dalla sbarra conduttrice, il flusso all'istante t è dato da:

$$\Phi[\underline{B}, t] = \iint_S \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds = \int_0^a \int_0^{x(t)} Cx^2 \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy \quad (28)$$

$$= Ca \int_0^{x(t)} x^2 dx = Ca \frac{v_0^3 t^3}{3} \quad \text{Wb} \quad (29)$$

Il flusso varia fino al tempo $t^* = L/v_0$, dopodiché la sbarra esce dal campo di induzione magnetica e il flusso rimane costante. Il modulo della f.e.m. indotta per $0 < t < t^*$ è dunque

$$\mathcal{E}_i(t) = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = Cav_0^3 t^2 \quad \text{V} \quad (30)$$

La corrente indotta nel solenoide nell'intervallo di tempo considerato circola in senso *orario* e la sua ampiezza è data da

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{Cav_0^3 t^2}{R} \quad \text{A} \quad (31)$$

La potenza istantanea dissipata sulla resistenza è data da:

$$P(t) = \frac{(\mathcal{E}_i)^2}{R} = \frac{(Cav_0^3)^2 t^4}{R} \quad \text{W} \quad (32)$$

La potenza dissipata non è costante nel tempo quindi durante l'intervallo di tempo $t \in [0, t^*]$ sec. l'energia elettrica totale W dissipata per effetto Joule risulta

$$W = \int_0^{t^*} P(t) dt = \frac{(Cav_0^3)^2}{R} \int_0^{t^*} t^4 dt = \frac{(Cav_0^3)^2}{R} \frac{(t^*)^5}{5} = \frac{C^2 a^2 v_0}{5R} L^5 \cong 0.1 \quad \text{J} \quad (33)$$