

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2022-2023)

17 Novembre 2023

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (8 punti) Due cariche puntiformi di uguale valore $Q_1 = Q_2 = -Q$, sono posizionate sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, simmetricamente rispetto all'origine ad una distanza $d = 6a$, come in figura 1. Un terza carica positiva è distribuita con densità lineare uniforme λ su un filamento di sezione trascurabile lungo $L = 2a$ disposto lungo l'asse y simmetricamente rispetto all'origine. Determinare l'espressione della distribuzione di carica λ in funzione di Q e a affinché il campo elettrostatico nel punto di osservazione $P = (0, 3a)$ generato dal sistema di cariche sia nullo;

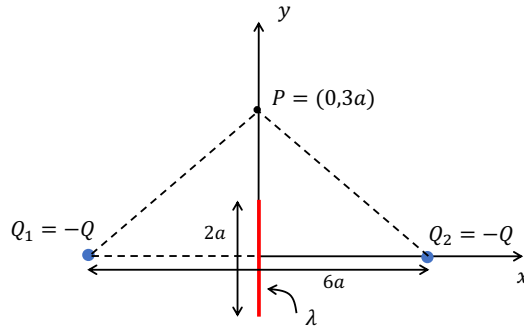


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Il campo elettrostatico generato da una carica puntiforme q posizionate in $\underline{r}'$ in un punto di osservazione $\underline{r}$ è:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (1)$$

Le due cariche di valore $-Q$, poste in $\underline{r}'_1 = -3a\hat{x}$ e $\underline{r}'_2 = 3a\hat{x}$ sono posizionate simmetricamente rispetto all'origine per cui nel punto di osservazione $\underline{r} = 3a\hat{y}$ producono due campi elettrostatici uguali in modulo e diretti come in figura 2.

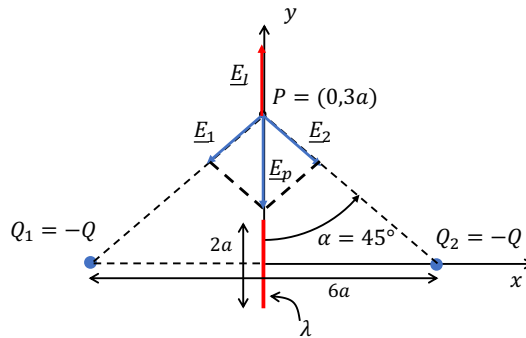


Figura 2: Geometria del problema 1

Indicato con $\underline{E}_2(0, 3a)$ il campo elettrostatico prodotto dalla carica $Q_2 = -Q$, data la simmetria, il campo totale $\underline{E}_p(0, 3a)$ prodotto da queste due cariche è:

$$\underline{E}_p(0, 3a) = 2|\underline{E}_2(0, 3a)| \cos \alpha (-\hat{y}) = -k_e \frac{2Q}{18a^2} \cos(45^\circ)(-\hat{y}) \quad (2)$$

$$= -k_e \frac{Q}{9a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} = -k_e \frac{Q\sqrt{2}}{18a^2} \hat{y} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (3)$$

dove $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Per quanto riguarda il campo elettrostatico nel punto P prodotto dalla distribuzione lineare di carica uniforme λ si consideri un tratto infinitesimo dy' di filamento carico posto nel punto $\underline{r}' = y'\hat{y}$. Il campo elettrico elementare $d\underline{E}_l(0, y)$ prodotto dalla carica $dq' = \lambda dy'$ nel punto di osservazione $\underline{r} = 3a\hat{y}$ è:

$$d\underline{E}_l(0, 3a) = k_e \frac{\lambda dy'}{|3a - y'|^3} (3a - y')\hat{y} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4)$$

dove $-a < y' < a$. Il campo elettrostatico generato da tutto il filamento carico è:

$$\underline{E}_l(0, 3a) = k_e \int_{-a}^a \frac{1}{(3a - y')^2} dy' \hat{y} = k_e \lambda \left[\frac{1}{(3a - y')} \right]_{-a}^a \quad (5)$$

$$= k_e \lambda \left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{4a} \right] \hat{y} = \frac{k_e \lambda}{4a} \hat{y} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (6)$$

La condizione di campo totale elettrico nullo nel punto di osservazione $(0, 3a)$ è data da:

$$\underline{E}_p(0, 3a) + \underline{E}_l(0, 3a) = 0 \quad (7)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{k_e \lambda}{4a} = k_e \frac{Q\sqrt{2}}{18a^2} \quad (8)$$

ed infine

$$\lambda = \frac{2\sqrt{2}Q}{9a} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}} \quad (9)$$

Problema 2 (8 punti) Nel vuoto, su una superficie sferica conduttrice di raggio $R_a = 0.5$ cm e spessore trascurabile è distribuita una carica elettrica con densità superficiale uniforme $\sigma = 1062.48 \cdot 10^{-9}$ [C · m⁻²]. In tutto il volume interno alla superficie sferica è distribuita un'altra carica elettrica con densità volumetrica $\rho_v(\underline{r}) = -\gamma/r$ dove $\gamma = 708.32 \cdot 10^{-9}$ [C · m⁻²] ed r è la distanza radiale dal centro. Si calcoli il valore del potenziale elettrostatico al centro della struttura sferica.

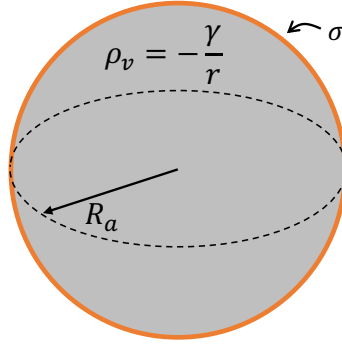


Figura 3: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

Data la simmetria sferica del problema il campo elettrostatico generato dalle due distribuzioni di carica esternamente e internamente alla superficie sferica avrà una configurazione radiale. Per il calcolo del potenziale possiamo determinare l'espressione esplicita del campo elettrostatico esternamente e internamente alla superficie sferica e quindi integrare su una traiettoria rettilinea radiale. Data la simmetria sferica del problema, è possibile determinare l'espressione della componente radiale E_r^d del campo elettrico all'interno della superficie sferica utilizzando il teorema di Gauss.

Considerando una superficie sferica di raggio $0 < r < R_a$ ed utilizzando un sistema di riferimento sferico con origine nel centro del sistema si ha:

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \quad (10)$$

dove

$$Q(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \left(\frac{-\gamma}{r'} \right) (r')^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr' = -4\pi\gamma \int_0^r r' dr' = -2\pi\gamma r^2 \quad \text{C} \quad (11)$$

Il campo elettrostatico interno alla superficie sferica è quindi:

$$\underline{E}_1(r) = -\frac{\gamma}{2\epsilon_0} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (12)$$

Per quanto riguarda il campo elettrico nel vuoto, sempre sfruttando la simmetria sferica del problema ed applicando il teorema di Gauss ad superfici sferiche di raggio $R_a < r$ si ottiene:

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (13)$$

dove

$$Q_{tot} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R_a} \left(\frac{-\gamma}{r'} \right) (r')^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr' + \sigma 4\pi R_a^2 = -2\pi\gamma R_a^2 + \sigma 4\pi R_a^2 = 2\pi R_a^2 (2\sigma - \gamma) \quad \text{C} \quad (14)$$

Il campo elettrostatico *esterno* alla superficie sferica è quindi:

$$\underline{E}_2(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sigma - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{R_a^2}{r^2} \hat{r} \quad (15)$$

Poiché il campo elettrostatico è conservativo, il potenziale $V(0)$ nell'origine si calcola integrando il lavoro elementare $-\underline{E}(r) \cdot d\mathbf{l}$ che si compie contro le forze del campo per spostare una carica positiva unitaria di un tratto $d\mathbf{l}$, lungo un cammino rettilineo radiale che si estende dall'infinito fino al centro del sistema sferico:

$$V(0) = \int_0^{R_a} \underline{E}_1(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_a}^{\infty} \underline{E}_2(r) \cdot \hat{r} dr \quad (16)$$

$$= \int_0^{R_a} -\frac{\gamma}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr + \int_{R_a}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sigma - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{R_a^2}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr \quad (17)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[-\frac{\gamma}{2} \int_0^{R_a} dr + \left(\sigma - \frac{\gamma}{2} \right) R_a^2 \int_{R_a}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \right] \quad (18)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[-\frac{\gamma}{2} R_a + \left(\sigma - \frac{\gamma}{2} \right) R_a^2 \left(-\frac{1}{r} \right)_{R_a}^{\infty} \right] \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[-\frac{\gamma}{2} R_a + \left(\sigma - \frac{\gamma}{2} \right) R_a \right] = \frac{R_a}{\epsilon_0} (\sigma - \gamma) = 200 \quad \text{V} \quad (20)$$

Problema 3 (8 punti) Un conduttore cilindrico cavo di raggio interno a e raggio esterno $b = 2a$, idealmente infinito, con asse z è percorso dalla corrente stazionaria con densità non uniforme $\underline{J} = \gamma\rho\hat{z}$ [A/m²] dove γ è una costante e ρ è la distanza radiale dall'asse z (vedi figura 4).

- (5 punti) Si determini l'espressione esplicita del campo magnetico in un punto generico esterno al conduttore cilindrico ($\rho > b$);
- (3 punti) sapendo che il campo magnetico nel punto P di coordinate $(\rho, \phi) = (7a, 0)$ è $\underline{H}(7a, 0) = 10^{-2}$ [A/m] e che $a = 0.5$ cm si calcoli il valore della costante γ .

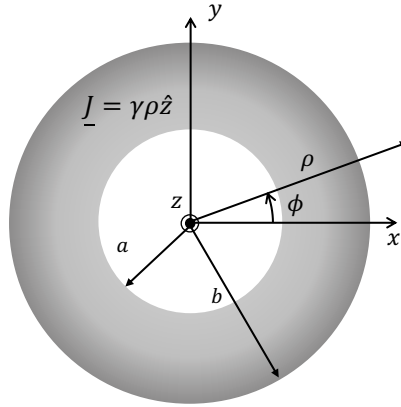


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il teorema della circuitazione di Ampere nel vuoto afferma che la circuitazione del vettore campo magnetico lungo un cammino chiuso orientato Γ che costituisce il bordo di una superficie aperta S dipende solo dalle correnti di conduzione che attraversano la superficie S secondo la relazione.

$$\oint_{\Gamma} \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}') \cdot \hat{n} ds' \quad (21)$$

Data la natura bidimensionale del problema, consideriamo un sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) come in figura 5. La densità di corrente *non* è uniforme sulla sezione ma ha comunque una simmetria circolare

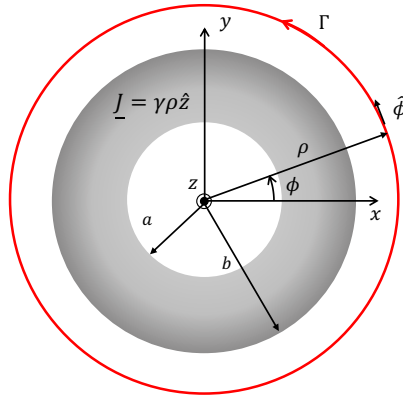


Figura 5: Geometria del problema 3

(indipendente da ϕ). Di conseguenza, se consideriamo un qualsiasi cammino circolare di centro l'origine, su tutti i punti di questo cammino il vettore campo magnetico è costante ed orientato tangenzialmente al cammino.

Consideriamo quindi un cammino chiuso Γ circolare orientato come in figura di raggio $\rho > b$. Data la simmetria circolare, il campo magnetico $\underline{H}(\rho, \phi) = \underline{H}(\rho)$ in tutti punti del cammino è costante in modulo e diretto tangenzialmente alla circonferenza Γ . Rispetto al sistema di riferimento cilindrico il campo magnetico è esprimibile come

$$\underline{H}(\rho) = H_\phi(\rho) \hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (22)$$

Applicando il teorema della circuitazione di Ampere (21) e tenendo conto del verso della densità di corrente si ha:

$$H_\phi(\rho) 2\pi\rho = \iint_S \underline{J}(\rho') \cdot \hat{z} ds' = \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \gamma \rho' \hat{z} \cdot \hat{z} \rho' d\rho' d\phi' \quad (23)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \gamma (\rho')^2 d\rho' d\phi' = 2\pi\gamma \int_a^{2a} (\rho')^2 d\rho' = 2\pi\gamma \frac{1}{3} \left[(\rho')^3 \right]_a^{2a} \quad (24)$$

$$= \frac{14}{3} \gamma \pi a^3 \quad (25)$$

Dalla precedente si ottiene:

$$H_\phi(\rho) = \frac{7}{3} \gamma \frac{a^3}{\rho} \quad (26)$$

e quindi

$$\underline{H}(\rho) = \frac{7\gamma a^3}{3\rho} \hat{\phi} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (27)$$

Nel punto P si ha:

$$H_\phi(7a) = \frac{7\gamma a^3}{3 \cdot 7a} = \frac{1}{3} \gamma a^2 \quad \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (28)$$

da cui

$$\gamma = \frac{3H_\phi(7a)}{a^2} = 1200 \quad \frac{\text{A}}{\text{m}^3} \quad (29)$$

Problema 4 (8 punti) Sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è presente una barretta rigida rettilinea OP di lunghezza $a = 0.8$ m di sezione trascurabile e resistenza totale $R = 20 \, \Omega$ allineata con l'asse x . Una seconda barretta circolare di raggio a a forma di quarto di circonferenza è collegata all'estremo P della barretta rettilinea e termina nel punto Q sull'asse y . Una ulteriore barretta rettilinea di conduttore ideale molto lunga, è vincolata a ruotare intorno all'origine e, durante la rotazione in senso antiorario, si appoggia strisciando con contatto elettrico sulla barra circolare PQ , a formare un circuito chiuso con la barretta OP . La sbarra ruota in senso antiorario con velocità angolare costante ω e tutto il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica costante $\underline{B} = 795.7 \cdot 10^{-3} \hat{z}$ T. Sapendo che la sbarra mobile compie un giro completo in $\Delta t = 0.8$ secondi, calcolare l'energia totale che si dissipa per effetto Joule sulla resistenza R in un giro.

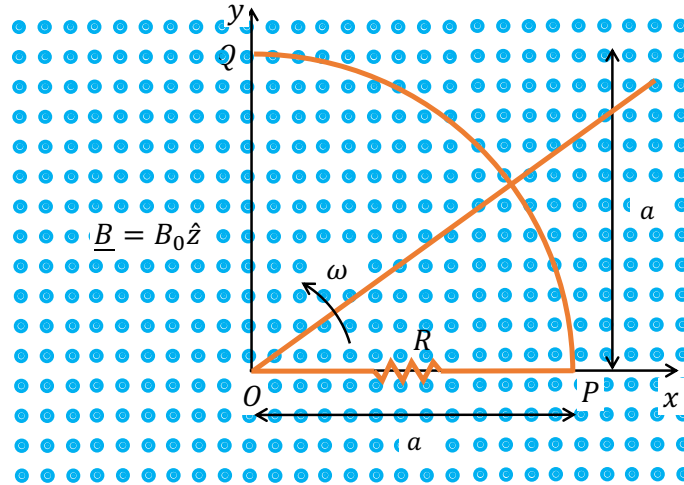


Figura 6: Geometria del problema 4

Soluzione al problema 4

La sbarra ruota di 90° in 0.2 secondi per cui la velocità angolare è

$$\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{0.2} = \frac{5\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (30)$$

Indichiamo con $t_0 = 0$ s l'istante di tempo in cui la barra ruotante si trova allineata con la barra OP e con $t_1 = 0.2$ s l'istante di tempo in cui la sbarra si trova allineata con il tratto OQ . Al generico istante $t_0 < t < t_1$ l'arco $l(t)$ di circonferenza percorso dalla barretta ruotante misurato a partire dal punto P è:

$$l(t) = \omega t a \quad \text{m} \quad (31)$$

L'area del settore circolare compreso tra la barretta ruotante e la barretta OP è

$$s(t) = \pi a^2 \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{\omega t a^2}{2} \quad \text{m}^2 \quad (32)$$

Dato che il campo magnetico è uniforme e diretto perpendicolarmente all'area $s(t)$, il flusso totale all'istante t è

$$\Phi(t) = B_0 s(t) = B_0 \frac{\omega t a^2}{2} \quad \text{Wb} \quad (33)$$

L'intensità f.e.m indotta all'istante t risulta quindi

$$\mathcal{E}_i = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_0 \frac{\omega a^2}{2} \cong 2 \quad \text{V} \quad (34)$$

L'intensità della corrente indotta è

$$I(t) = B_0 \frac{\omega a^2}{2R} \cong 0.1 \quad \text{A} \quad (35)$$

Per contrastare l'aumento del flusso, la corrente indotta circola in senso *orario*.

La potenza istantanea dissipata sulla resistenza è costante ed è data da:

$$P = RI^2 = B_0^2 \frac{\omega^2 a^4}{4R} \cong 0.2 \text{ W} \quad (36)$$

Poiché la potenza dissipata è costante nel tempo, nell'intervallo di tempo $\Delta t = 0.2 \text{ sec.}$ che la barretta impiega a percorrere il quarto di circonferenza l'energia elettrica totale W dissipata per effetto Joule risulta

$$W = RI^2 \Delta t = B_0^2 \frac{\omega^2 a^4}{4R} \Delta t \cong 0.04 \text{ J} \quad (37)$$