

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2023-2024)

26 Gennaio 2024

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}\right)$$

Problema 1 (8 punti) Un cilindro isolante a sezione circolare di raggio R , infinitamente lungo, ha una densità di carica volumetrica $\rho_v(\rho)$ che varia con la distanza dall'asse ρ come $\rho_v(\rho) = \rho_{v0} \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \frac{C}{m^3}$. Nell'ipotesi che sia $\rho_{v0} = 2.45 \cdot 10^{-6} C/m^3$ e $R = 10 \text{ cm}$ determinare, rispetto al sistema di riferimento scelto, il vettore campo elettrostatico a distanza $\rho_a = 6 \text{ cm}$.

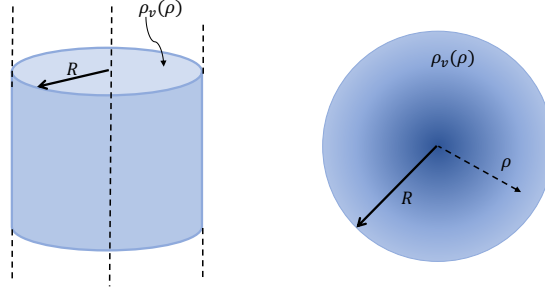


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Si consideri un sistema di riferimento cilindrico $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ con asse z coincidente con l'asse del cilindro. Si consideri poi una superficie di Gauss di forma cilindrica, con asse z , raggio $\rho < R$ ed altezza L . Poiché la distribuzione di carica $\rho_v(\rho)$ ha simmetria cilindrica, il campo elettrico in tutti i punti della superficie laterale di Gauss ha solo la componente radiale E_ρ costante. La carica totale $Q(\rho)$ contenuta all'interno della superficie di Gauss è funzione del raggio della superficie di Gauss cilindrica ρ e può essere calcolata come:

$$Q(\rho) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho_{v0} \left(1 - \frac{\rho'}{R}\right) \rho' d\rho' d\phi' dz' \quad (1)$$

$$= \rho_{v0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \rho' d\rho' d\phi' dz' - \frac{\rho_{v0}}{R} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\rho (\rho')^2 d\rho' d\phi' dz' \quad (2)$$

$$= \rho_{v0} 2\pi L \frac{(\rho')^2}{2} \Big|_0^\rho - \frac{\rho_{v0}}{R} 2\pi L \frac{(\rho')^3}{3} \Big|_0^\rho \quad (3)$$

$$= \rho_{v0} \pi L \rho^2 - \rho_{v0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \frac{(\rho')^2}{R} d\rho' d\phi' dz' \quad (4)$$

$$= \rho_{v0} \pi L \rho^2 - \frac{\rho_{v0} 2\pi L}{3R} \rho^3 = \rho_{v0} \pi L \rho^2 \left(1 - \frac{2\rho}{3R}\right) \quad (5)$$

Poiché il flusso attraverso le due superfici di base è nullo, applicando il teorema di Gauss si ottiene

$$E_\rho 2\pi \rho L = \frac{Q(\rho)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{v0} \pi L \rho^2 \left(1 - \frac{2\rho}{3R}\right) \quad (6)$$

da cui

$$\underline{E}(\rho) = E_\rho \hat{\rho} = \frac{\rho_{v0}\rho}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{2\rho}{3R}\right) \hat{\rho} \quad (7)$$

dove $\hat{\rho}$ è indica il versore radiale nel sistema di riferimento scelto. A distanza $\rho_a = 6 \text{ cm}$ si ha:

$$\underline{E}(\rho_a) \cong 4.98 \cdot 10^3 \hat{\rho} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (8)$$

Problema 2 (8 punti) Si consideri il circuito di figura 2, dove $\Delta V = 108 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = R = 50 \Omega$, $R_2 = 3R$, $C_1 = C_4 = 100 \text{ pF}$, $C_2 = 2C_1$ e $C_3 = 4C_1$. Durante il periodo di tempo $t < t_0$, l'interruttore viene lasciato nella posizione A fino al raggiungimento della condizione di equilibrio. Raggiunta la condizione di equilibrio, all'istante $t = t_0$, l'interruttore viene commutato nella posizione B con i condensatori C_3 e C_4 scarichi e, dopo un certo tempo (idealmente infinito) si realizza una nuova situazione di regime. Ricavare le differenze di potenziale ΔV_{EF} e ΔV_{FG} ai terminali dei due condensatori C_3 e C_4 nella condizione di equilibrio finale.

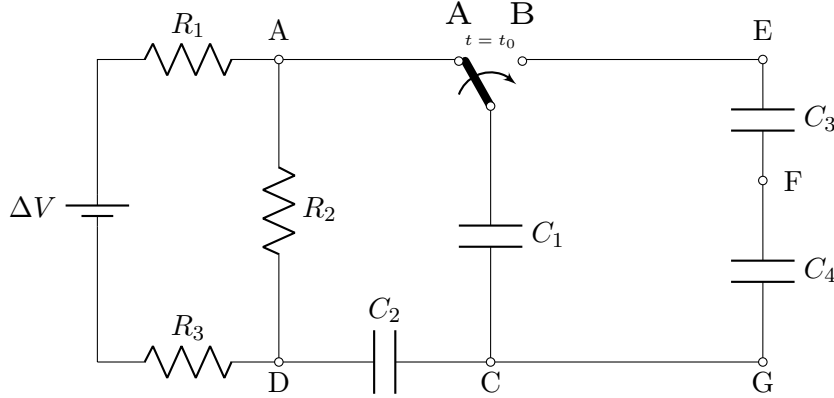


Figura 2: Circuito equivalente del problema 2

Soluzione del problema 2

Con l'interruttore in posizione A la differenza di potenziale ai capi della serie dei condensatori C_1 e C_2 a regime è equivalente alla caduta di potenziale ΔV_{AD} ai capi della resistenza R_2 . La corrente I che circola a regime nelle tre resistenze è

$$I = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\Delta V}{5R} = 0.432 \text{ A} \quad (9)$$

e quindi la differenza di potenziale è

$$\Delta V_{AD} = IR_2 = \frac{\Delta V R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\Delta V 3R}{5R} = \frac{3}{5} \Delta V = 64.8 \text{ V} \quad (10)$$

La quantità di carica totale presente sulle armature della serie dei condensatori C_1 e C_2 prima della commutazione dell'interruttore è

$$Q^0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Delta V_{AD} = \frac{C_1 2C_1}{C_1 + 2C_1} \Delta V_{AD} = \frac{2}{5} C_1 \Delta V = 4.32 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (11)$$

Questa è anche la quantità di carica Q_2^0 che si deposita a regime sul condensatore C_1 , per cui a regime $Q_2^0 = Q_0$.

Al tempo $t = t_0$ l'interruttore viene commutato nella posizione B. Indichiamo con C_s la capacità equivalente del condensatore ottenuto dalla serie tra C_3 e C_4 . Si ha

$$C_s = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{4C_1^2}{5C_1} = \frac{4}{5} C_1 = 80 \text{ pF} \quad (12)$$

All'equilibrio, ai capi del parallelo tra C_1 e C_s si ha la stessa differenza di potenziale ΔV_{BC} . Inoltre, per la legge di conservazione della carica, se all'equilibrio finale indichiamo con Q_1^∞ e con Q_s^∞ le cariche dei due condensatori C_1 e C_s , si ha

$$Q_2^0 = Q_1^\infty + Q_s^\infty \text{ C} \quad (13)$$

La quantità di carica presente inizialmente sulle armature di C_1 si ridistribuisce anche sulle armature di C_s . La differenza di potenziale finale ΔV_{BC} ai capi del parallelo dei due condensatori C_1 e C_s è:

$$\Delta V_{BC} = \frac{Q_2^0}{C_p} = \frac{2}{5} C_1 \Delta V \frac{5}{9C_1} = \frac{2}{9} \Delta V = 24 \text{ V} \quad (14)$$

dove C_p indica la capacità equivalente al parallelo tra C_1 e C_s :

$$C_p = C_1 + C_s = C_1 + \frac{4}{5}C_1 = \frac{9}{5}C_1 = 180 \text{ pF} \quad (15)$$

Nota la differenza di potenziale ai capi dei condensatori C_1 e C_s , la cariche risulteranno

$$Q_1^\infty = C_1 \Delta V_{BC} = \frac{2}{9}C_1 \Delta V = 2.4 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (16)$$

$$Q_s^\infty = C_s \Delta V_{BC} = \frac{4}{5}C_1 \frac{2}{9} \Delta V = \frac{8}{45}C_1 \Delta V = 1.92 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (17)$$

$$(18)$$

Infine poiché la carica sui condensatori in serie è in entrambi uguale a Q_s^∞ , le due differenze di potenziale sono:

$$\Delta V_{EF} = \frac{Q_s^\infty}{C_3} = \frac{2}{45} \Delta V = 4.8 \text{ V} \quad (19)$$

$$\Delta V_{FG} = \frac{Q_s^\infty}{C_4} = \frac{8}{45} \Delta V = 19.2 \text{ V} \quad (20)$$

Problema 3 (8 punti) Il circuito elettrico mostrato in figura è formato da un filo conduttore composto da due tratti rettilinei PQ e MN , che si incrociano senza contatto elettrico nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano. I due tratti rettilinei sono connessi tra i punti $N - P$ e $M - Q$ da due archi di circonferenza di raggio $R_1 = 24.435 \text{ mm}$ ed $R_2 = 3R_1$ e centro nell'origine del sistema di riferimento. I tratti circolari MN e PQ sono inclinati fra loro di $\alpha = 90^\circ$, come mostrato in figura 3. Il circuito è percorso da una corrente stazionaria I che proviene idealmente dall'infinito e ritorna all'infinito lungo un tratto rettilineo parallelo all'asse x . Sapendo che il campo di induzione magnetica totale misurato nell'origine è $\underline{B}(0) = -3 \cdot 10^{-4} \hat{z} \text{ T}$ calcolare il valore della corrente I .

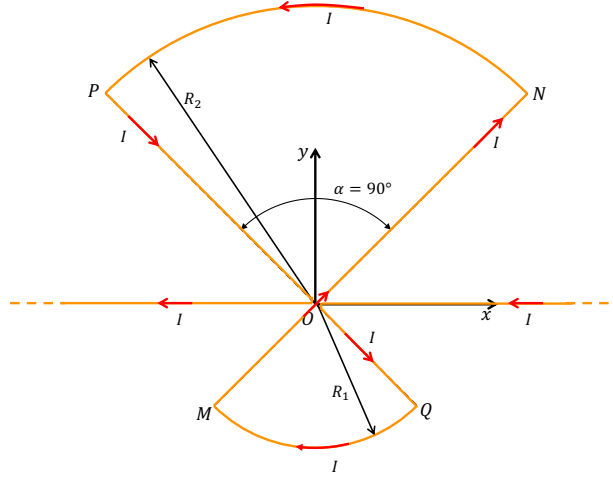


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il vettore induzione magnetica generato nell'origine del sistema di riferimento può essere calcolato utilizzando la prima formula di Laplace:

$$d\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\underline{l}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad (21)$$

Consideriamo un qualsiasi elementino $d\underline{l}(\underline{r}')$ posto sui tratti rettilinei PQ e MN e sul tratto rettilineo parallelo all'asse x . Poiché il punto di osservazione è nell'origine il contributo (21) è nullo perché i due vettori $d\underline{l}(\underline{r}')$ e $(\underline{r} - \underline{r}')$ sono paralleli. Di conseguenza il campo di induzione magnetica nell'origine sarà dato solo dalla corrente che scorre nei due tratti circolari.

Per quanto riguarda i due tratti circolari, consideriamo un sistema di riferimento cilindrico $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ associato al riferimento cartesiano, con centro nell'origine. Con riferimento alla figura 4 consideriamo un elementino di cammino $d\underline{l}(\underline{r}_2')$, posizionato in $\underline{r}_2' = R_2 \hat{\rho}_2' = R_2(\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y})$ sul cammino NP . La sua distanza dal centro è indipendente da ϕ' e si può scrivere:

$$d\underline{l} = R_2 d\phi' \hat{\phi}' \quad (22)$$

$$d\underline{l} \times (\underline{r} - \underline{r}_2') = d\underline{l} \times (-\underline{r}_2') = R_2 d\phi' \hat{\phi}' \times (-R_2 \hat{\rho}_2') = (R_2)^2 d\phi' \hat{z} \quad (23)$$

Sostituendo nella prima formula di Laplace:

$$d\underline{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(R_2)^2}{(R_2)^3} d\phi' \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_2} d\phi' \hat{z} \quad (24)$$

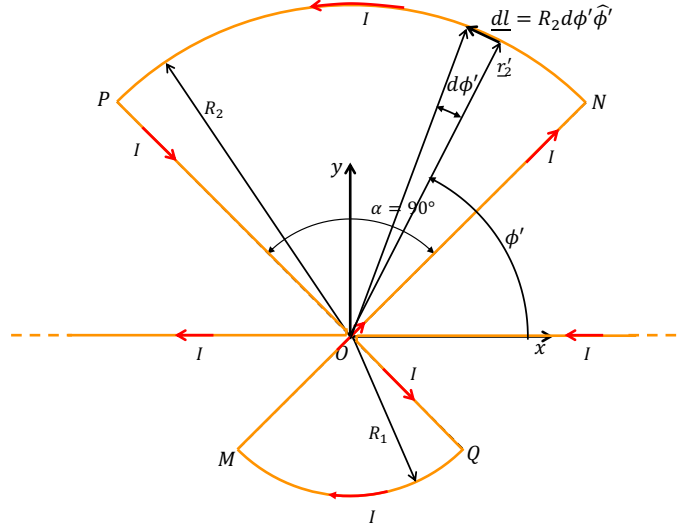


Figura 4: Geometria per il calcolo dei tratti curvilinei

Integrando l'espressione precedente tra gli estremi $\phi_N \leq \phi_P$, e tenendo presente che $(\phi_P - \phi_N) = \pi/2$, si ottiene che il contributo del tratto semicircolare NP è

$$\underline{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_2} \int_{\phi_N}^{\phi_P} d\phi' \hat{z} \quad (25)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_2} (\phi_P - \phi_N) \hat{z} \quad (26)$$

$$= \frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_2} \hat{z} = \frac{\mu_0}{24} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad \text{T} \quad (27)$$

In modo del tutto analogo si dimostra che il contributo del tratto semicircolare QM è¹

$$\underline{B}_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_1} \int_{\phi_M}^{\phi_Q} d\phi' (-\hat{z}) \quad (28)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R_1} (\phi_Q - \phi_M) \hat{z} = -\frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad \text{T} \quad (29)$$

Sommando vettorialmente i due contributi, il campo di induzione totale nell'origine è:

$$\underline{B}_t(0,0) = \underline{B}_1(0,0) + \underline{B}_2(0,0) = \left[\frac{\mu_0}{24} \frac{I}{R_1} - \frac{\mu_0}{8} \frac{I}{R_1} \right] \hat{z} = -\frac{\mu_0}{12} \frac{I}{R_1} \hat{z} \quad \text{T} \quad (30)$$

Risolvendo per I e considerando solo i moduli si ottiene:

$$I = \frac{12R_1}{\mu_0} |\underline{B}_t(0,0)| \quad (31)$$

da cui $I \cong 70 \text{ A}$

¹Alternativamente, data la simmetria circolare del problema, in entrambi i casi il campo di induzione magnetica (29) e (27) sono equivalenti singolarmente a un quarto il campo di induzione generato da una spira circolare al proprio centro $\underline{B}_{1,2}(0,0) = \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} (\pm \hat{z})$.

Problema 4 (8 punti) Sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è presente, nel semispazio $x > 0$, un campo di induzione magnetica uniforme $\underline{B} = 716.2 \cdot 10^{-3} \hat{z} \text{ T}$. Un circuito rigido è formato da due barrette rigide rettilinee OP e OQ di lunghezza $a = 0.4 \text{ m}$, che formano tra loro un angolo di $\alpha = 60^\circ$, e connesse da una barretta circolare di raggio a . Il conduttore che forma il circuito rigido ha sezione trascurabile e resistenza totale $R = 3 \text{ } \Omega$. Il circuito rigido è vincolato a ruotare dall'istante $t = 0$ intorno al vertice O (coincidente con l'origine) con velocità angolare costante ω in senso orario, partendo dalla posizione di figura 5. Sapendo che il circuito compie un giro completo in $\Delta t = 1.2$ secondi, calcolare l'energia totale che si dissipa per effetto Joule sulla resistenza R in un giro.

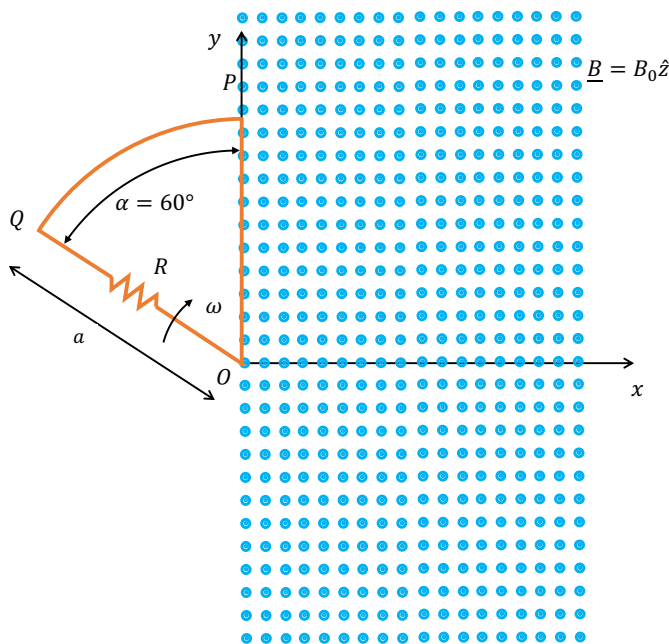


Figura 5: Geometria del problema 3

Soluzione al problema 4

La sbarra ruota di 60° in 0.2 secondi per cui la velocità angolare è

$$\omega = \frac{\pi}{3} \frac{1}{0.2} = \frac{5\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (32)$$

All'istante $t_0 = 0 \text{ s}$, quando il circuito inizia a ruotare, il tratto OP del circuito si trova allineato con l'asse y e il circuito inizierà ad entrare nel semispazio $x > 0$. All'istante di tempo $t_1 = 0.2 \text{ s}$ il circuito sarà entrato completamente nel semispazio $x > 0$ e il tratto OQ sarà allineato con l'asse y . All'istante $t_2 = 0.6 \text{ s}$ il tratto OP sarà di nuovo allineato con l'asse y e il circuito inizierà ad uscire dal semispazio $x > 0$, processo che si completerà all'istante $t_3 = 0.8 \text{ s}$. I due intervalli di tempo in cui si avrà variazione del flusso attraverso il circuito sono $\Delta t_a \in [0, t_1]$ e $\Delta t_b \in [t_2, t_3]$

A causa della variazione di flusso, in corrispondenza di questi due intervalli di tempo sul circuito si indurrà una forza elettromotrice e di conseguenza una corrente indotta. Consideriamo l'intervallo di tempo $0 < t < t_1$. Al generico istante t l'arco $l(t)$ di circonferenza immerso nel semispazio $x > 0$ è:

$$l(t) = \omega t a \text{ m} \quad (33)$$

L'area del settore circolare interessata dal flusso del campo di induzione $\underline{B}$ è

$$s(t) = \frac{\omega t a^2}{2} \text{ m}^2 \quad (34)$$

Dato che il campo magnetico è uniforme e diretto perpendicolarmente all'area $s(t)$, il flusso totale all'istante t è

$$\Phi(t) = B_0 s(t) = B_0 \frac{\omega t a^2}{2} \quad \text{Wb} \quad (35)$$

L'intensità della f.e.m indotta durante tutto l'intervallo $0 < t < t_1$ risulta costante e vale

$$\mathcal{E}_i = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_0 \frac{\omega a^2}{2} \cong 0.3 \quad \text{V} \quad (36)$$

L'intensità della corrente indotta è

$$I(t) = B_0 \frac{\omega a^2}{2R} \cong 0.1 \quad \text{A} \quad (37)$$

Per contrastare l'aumento del flusso, la corrente indotta circola in senso *orario*.

Con ragionamento analogo è facile ricavare che nell'intervallo di tempo $t_2 < t < t_3$, sia la forza elettromotrice che la corrente indotta sono ancora date dalle (36) e (37). Tuttavia, in questo secondo caso, per contrastare la diminuzione del flusso, la corrente indotta circolerà in senso *antiorario*. La potenza istantanea dissipata sulla resistenza è in entrambi i casi costante ed è data da:

$$P = RI^2 = B_0^2 \frac{\omega^2 a^4}{4R} \cong 0.03 \quad \text{W} \quad (38)$$

Poiché la potenza dissipata è costante nel tempo, nell'intervallo di tempo $\Delta t = \Delta t_a + \Delta t_b = 0.4 \text{ s}$ che il circuito impiega ad entrare ed uscire dalla zona interessata dal campo di induzione, l'energia elettrica totale W dissipata per effetto Joule risulta

$$W = RI^2 \Delta t = B_0^2 \frac{\omega^2 a^4}{4R} \Delta t \cong 0.012 \quad \text{J} \quad (39)$$