

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2023-2024)

23 Febbraio 2024

$$\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (11 punti) Nel volume di una sfera di raggio $R_1 = 20 \text{ cm}$ è distribuita una carica elettrica con densità volumetrica $\rho_v(r') = \gamma/r' \text{ C/m}^3$, dove $\gamma = 2.125 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$ è una costante ed r' rappresenta la distanza dal centro. In posizione concentrica rispetto alla distribuzione sferica di carica è presente un guscio sferico di materiale dielettrico, lineare, omogeneo, isotropo, caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$, di raggio interno R_1 ed esterno $R_2 = 3R_1$. Esternamente al guscio c'è il vuoto. Determinare, rispetto al sistema di riferimento scelto:

- a) il vettore campo elettrico nelle regioni $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$;
- b) il valore del potenziale elettrostatico al centro della sistema sferico.

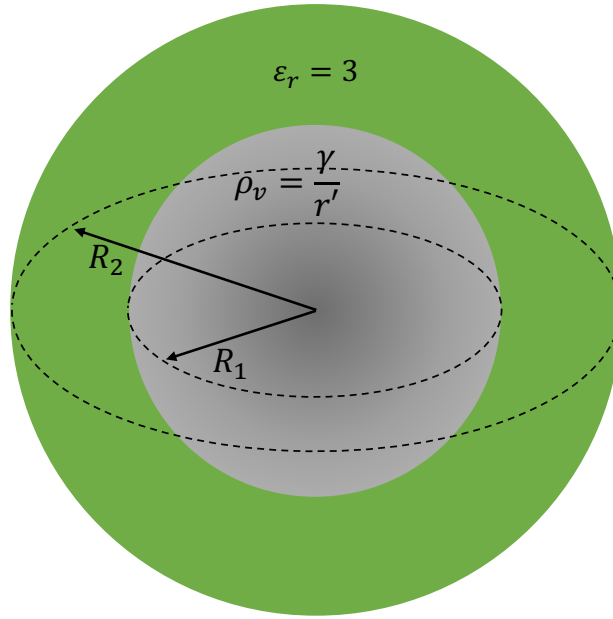


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)

Consideriamo un sistema di riferimento sferico (r, θ, ϕ) , con origine al centro del sistema sferico. Vista la simmetria sferica si può utilizzare il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie di Gauss sferica di raggio r per entrambe le tre regioni di interesse. Essendo il campo elettrico, per simmetria sferica diretto solo radialmente in tutti i punti della superficie sferica di raggio r , avremo

$$D_r(r) \cdot 4\pi r^2 = Q(r) \quad (1)$$

dove $Q(r)$ è la carica totale libera contenuta all'interno della superficie di Gauss sferica.

1) $r < R_1$. In questo caso la relazione costitutiva tra campo elettrico ed induzione elettrica è $\underline{D}(r) = \epsilon_0 \underline{E}(r)$. La carica totale libera contenuta all'interno della superficie sferica di Gauss di raggio generico r è data da :

$$Q(r) = \iiint_V \rho_v(\underline{r}') dv' = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(r')^2} (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' = \gamma 4\pi \int_0^r r' dr' = \gamma 4\pi \left(\frac{r^2}{2} \right) = 2\pi\gamma r^2 \quad (2)$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$D_r(r) = \frac{2\pi\gamma r^2}{4\pi r^2} = \frac{\gamma}{2} \quad (3)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_1(r) = \frac{\gamma}{2\epsilon_0} \hat{r} \cong 120 \hat{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (4)$$

2) $R_1 < r < R_2$. In questo caso la relazione costitutiva tra campo elettrico ed induzione elettrica è $\underline{D}(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(r)$. La carica totale presente all'interno della superficie di Gauss di raggio r , è tutta quella dovuta alla distribuzione volumetrica di raggio R_1 ed è data da

$$Q(r)|_{r=R_1} = 2\pi\gamma R_1^2 \quad (5)$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$D_r(r) = \frac{2\pi\gamma R_1^2}{4\pi r^2} = \frac{\gamma R_1^2}{2r^2} \quad (6)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_2(r) = \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \cong \frac{1.6}{r^2} \hat{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (7)$$

3) $r > R_2$. In questo caso la relazione costitutiva tra campo elettrico ed induzione elettrica è $\underline{D}(r) = \epsilon_0 \underline{E}(r)$. La carica presente all'interno della superficie di Gauss data dalla distribuzione di densità volumetrica è la stessa del punto 2) per cui si ottiene ancora

$$D_r(r) = \frac{2\pi\gamma R_1^2}{4\pi r^2} = \frac{\gamma R_1^2}{2r^2} \quad (8)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_3(r) = \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cong \frac{4.8}{r^2} \hat{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (9)$$

b)

Il potenziale $V(0)$ al centro della sfera si calcola integrando il lavoro elementare $-\underline{E}(r) \cdot d\underline{l}$ che si compie contro le forze del campo per spostare una carica positiva unitaria di un tratto $d\underline{l}$, lungo un cammino rettilineo radiale che si estende dall'infinito fino al centro:

$$V(0) = \int_0^{R_1} \underline{E}_1(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_1}^{R_2} \underline{E}_2(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{R_2}^{\infty} \underline{E}_3(r) \cdot \hat{r} dr = \int_0^{R_1} \frac{\gamma}{2\epsilon_0} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0 r^2} dr \quad (10)$$

$$= \frac{\gamma}{2\epsilon_0} R_1 + \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{\infty} = \frac{\gamma}{2\epsilon_0} R_1 + \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{\gamma R_1^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{R_2} \quad (11)$$

$$= \frac{\gamma R_1}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3\epsilon_r} + \frac{1}{6} \right] \quad (12)$$

Sostituendo i valori noti:

$$V(R_1) = \frac{\gamma R_1}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \right] = \frac{7\gamma R_1}{9\epsilon_0} \cong 37.33 \text{ V} \quad (13)$$

Problema 2 (11 punti) Un condensatore cilindrico, ideale, a sezione circolare e di lunghezza $L = 15.8 \text{ cm}$ è costituito da un'armatura cilindrica esterna di raggio $b = 3a$ coassiale ad un'armatura cilindrica interna di raggio $a = 3 \text{ mm}$ ed è riempito per metà di *mica*, materiale omogeneo, isotropo, lineare con $\epsilon_r^{mi} = 5$. Il condensatore è collegato esternamente ad un generatore di f.e.m che mantiene una differenza di potenziale costante tra la armature di $\Delta V_g = 600 \text{ V}$. Successivamente la parte in aria viene completamente riempita di *allumina*, materiale omogeneo, isotropo, lineare con $\epsilon_r^{al} = 9$. Determinare:

- la variazione della quantità di carica Δq erogata dal generatore tra la condizione iniziale e quella finale;
- la variazione di energia elettrostatica immagazzinata tra la condizione iniziale e la condizione finale.

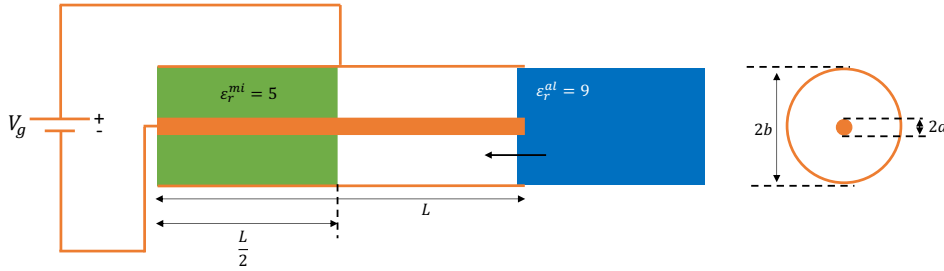


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a) La capacità totale del condensatore riempito per metà di aria e per metà di mica è pari alla capacità di due condensatori in parallelo. Indicando con C_a la capacità del condensatore in aria e con C_m la capacità del condensatore in mica si ha che la capacità totale iniziale è

$$C_i = C_a + C_m = 6C_a \cong 24 \text{ pF} \quad (14)$$

dove

$$C_a = \frac{2\pi\epsilon_0 \left(\frac{L}{2}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln(3)} \cong 4 \text{ pF} \quad (15)$$

$$C_m = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r^{mi} \left(\frac{L}{2}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{5\pi\epsilon_0 L}{\ln(3)} = 5C_a \cong 20 \text{ pF} \quad (16)$$

$$(17)$$

La carica iniziale Q_i presente sulle armature del condensatore è data da:

$$Q_i = C_i V_g = 6C_a V_g \cong 14.40 \text{ nC} \quad (18)$$

Analogamente, indicando con C_{al} la capacità del condensatore in allumina e con C_m la capacità del condensatore in mica si ha che la capacità totale finale è

$$C_f = C_{al} + C_m = 14C_a \cong 56 \text{ pF} \quad (19)$$

dove

$$C_{al} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r^{al} \left(\frac{L}{2}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{9\pi\epsilon_0 L}{\ln(3)} = 9C_a \cong 36 \text{ pF} \quad (20)$$

$$(21)$$

La carica finale Q_f presente sulle armature del condensatore è data da:

$$Q_f = C_f V_g = 14 C_a V_g \cong 33.6 \text{ nC} \quad (22)$$

La variazione della quantità di carica erogata dal generatore è

$$\Delta q = Q_f - Q_i = 8 C_a V_g \cong 19.2 \text{ nC} \quad (23)$$

b) La variazione di energia elettrostatica immagazzinata è:

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_f V_g^2 - \frac{1}{2} C_i V_g^2 = \frac{1}{2} (C_f - C_i) V_g^2 = 4 C_a V_g^2 \cong 5.76 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad (24)$$

Problema 3 (11 punti) Una spira chiusa, rigida, piana, è formato da un filo conduttore composto da due tratti rettilinei PQ e MN e da due archi di circonferenza QM e NP di raggio $R_1 = 6.98 \text{ cm}$ ed $R_2 = 1.5R_1$ e centro nell'origine del sistema di riferimento, come mostrato in figura 3. I tratti MN e PQ si trovano sui due raggi dei due archi di circonferenza concentrici e sono inclinati fra loro di $\alpha = 120^\circ$. La spira è percorsa da una corrente variabile quasi-stazionaria $I(t)$ orientata come in figura. Nell'origine del sistema di riferimento è posizionata una seconda piccola spira quadrata di lato $a = 1 \text{ cm}$ e resistenza totale $R = 3 \Omega$, complanare con la spira $MNPQ$. Nell'ipotesi che il campo di induzione magnetica presente nell'origine sia costante sul tutto il piano della spira quadrata, si determini:

- il valore del coefficiente di mutua induzione tra le due spire;
- l'intensità e il verso di precorrenza della corrente indotta nella spira quadrata se la corrente $I(t)$ cresce linearmente da $I_{min} = 0.1 \text{ A}$ a $I_{max} = 1 \text{ A}$ nell'intervallo di tempo di $\Delta t = 0.003 \text{ sec}$.

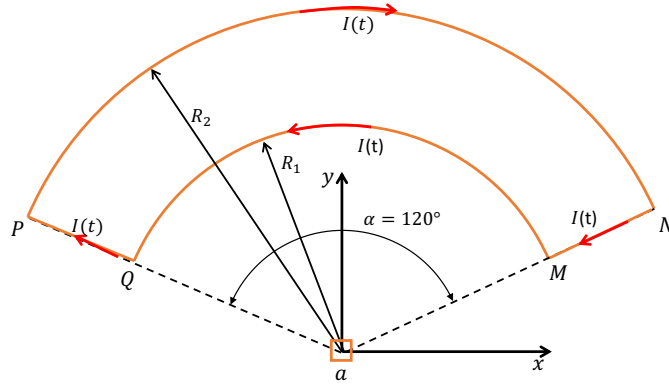


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Il vettore induzione magnetica generato nell'origine del sistema di riferimento dalla spira $PQMN$ può essere calcolato utilizzando la prima formula di Laplace:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t) d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (25)$$

Consideriamo un qualsiasi elementino $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ posto sui due tratti rettilinei PQ e MN . Poiché il punto di osservazione è nell'origine il contributo (25) è nullo perché i due vettori $d\mathbf{l}(\mathbf{r}')$ e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ sono paralleli. Di conseguenza il campo di induzione magnetica nell'origine sarà dato solo dalla corrente che scorre nei due tratti curvilinei. Per quanto riguarda i due tratti semicircolari, consideriamo un sistema di riferimento cilindrico $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$ associato al riferimento cartesiano, con centro nell'origine. Con riferimento alla figura 4 consideriamo un elementino di cammino $d\mathbf{l}(\mathbf{r}_2')$, posizionato in $\mathbf{r}_2' = R_2 \hat{r}_2' = R_2(\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y})$ sul cammino NP . La sua distanza dal centro è indipendente da ϕ' e si può scrivere:

$$d\mathbf{l} = -R_2 d\phi' \hat{\phi}' \quad (26)$$

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2') = d\mathbf{l} \times (-\mathbf{r}_2') = -R_2 d\phi' \hat{\phi}' \times (-R_2 \hat{r}_2') = -(R_2)^2 d\phi' \hat{z} \quad (27)$$

Sostituendo nella prima formula di Laplace:

$$dB_2(0,0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t)(R_2)^2}{(R_2)^3} d\phi' \hat{z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t)}{R_2} d\phi' \hat{z} \quad (28)$$

Integrando l'espressione precedente tra gli estremi $\phi'_P \leq \phi'_N$, e tenendo presente che $(\phi'_P - \phi'_N) = 2\pi/3$, in condizioni quasi-stazionarie si ottiene che il contributo del tratto semicircolare NP è

$$B_2(t,0,0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t)}{R_2} \int_{\phi'_N}^{\phi'_P} d\phi' \hat{z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t)}{R_2} (\phi'_P - \phi'_N) \hat{z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t)}{R_2} \frac{2\pi}{3} \hat{z} = -\frac{\mu_0}{6} \frac{I(t)}{R_2} \hat{z} \quad (29)$$

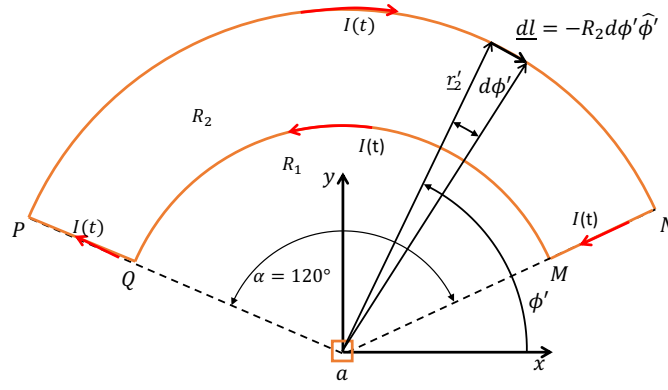


Figura 4: Geometria per il calcolo del contributo dei tratti curvilinei

In modo del tutto analogo si dimostra che il contributo del tratto semicircolare QM è¹

$$\underline{B}_1(t, 0, 0) = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi R_1} \int_{\phi'_M}^{\phi'_Q} d\phi' (\hat{z}) = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi R_1} (\phi'_Q - \phi'_M) \hat{z} = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi R_1} \frac{2\pi}{3} \hat{z} = \frac{\mu_0 I(t)}{6 R_1} \hat{z} \quad (30)$$

Sommando vettorialmente i due contributi e tenendo presente che $R_2 = (3/2)R_1$, il campo di induzione totale nell'origine è:

$$\underline{B}(t, 0, 0) = \underline{B}_1(t, 0, 0) + \underline{B}_2(t, 0, 0) = \left[-\frac{\mu_0 I(t)}{9 R_1} + \frac{\mu_0 I(t)}{6 R_1} \right] \hat{z} = \frac{\mu_0 I(t)}{18 R_1} \hat{z} \quad (31)$$

Considerando il campo di induzione magnetica costante su tutto il piano della spira di raggio a , il flusso totale concatenato è:

$$\Phi(t) = \underline{B}(t, 0, 0) \cdot S\hat{n} = \frac{\mu_0 I(t)}{18 R_1} \hat{z} \cdot \hat{z}(a^2) = \frac{\mu_0 I(t) a^2}{18 R_1} \quad (32)$$

Il coefficiente di mutua induzione è quindi:

$$M = \frac{d\Phi(t)}{dI(t)} = \frac{\Phi(t)}{I(t)} = \frac{\mu_0 a^2}{18 R_1} \cong 0.1 \text{ nH} \quad (33)$$

L'ampiezza della forza elettromotrice indotta nella seconda spira è data da

$$|\mathcal{E}_i| = \left| -M \frac{dI(t)}{dt} \right| \quad (34)$$

Essendo

$$I(t) = \frac{(I_{max} - I_{min})}{\Delta t} t + I_{min} \quad (35)$$

si ha:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{(I_{max} - I_{min})}{\Delta t} \quad (36)$$

per cui

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{\mu_0 a^2}{18 R_1} \frac{(I_{max} - I_{min})}{\Delta t} \cong (0.1 \cdot 10^{-9})(300) \cong 30 \cdot 10^{-9} \text{ V} \quad (37)$$

L'intensità della corrente nella spira di raggio a , durante l'intervallo di tempo considerato è

$$|I_s| = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} \cong 10 \cdot 10^{-9} \text{ A} \quad (38)$$

¹Alternativamente, data la simmetria circolare del problema, in entrambi i casi il campo di induzione magnetica (29) e (30) sono equivalenti singolarmente a un terzo il campo di induzione generato da una spira circolare al proprio centro $\underline{B}_{1,2}(0, 0) = \frac{1}{3} \frac{\mu_0 I}{R} (\pm \hat{z})$.