

# Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

9 Aprile 2021.

**Problema 1** (8 punti) Tre cariche puntiformi  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , occupano i vertici di un triangolo isoscele di base  $b = 2a$  ed altezza  $h = 2a$ , disposto come in figura 1. Nell'ipotesi che  $Q_1 = 3 \mu C$  e  $Q_2 = -2 \mu C$ :

- determinare il valore della carica  $Q_3$  affinché il potenziale elettrico nel punto  $x = h$  generato dal sistema di cariche sia nullo;
- usando il valore di  $Q_3$  calcolato al punto precedente, ed ipotizzando  $h = (\sqrt{5} - 2) m$ , calcolare il lavoro fatto contro le forze del campo per portare una carica positiva di valore  $q = \sqrt{5} C$  dal punto  $A = (h, 0)$  al punto  $B = (0, 0)$ .

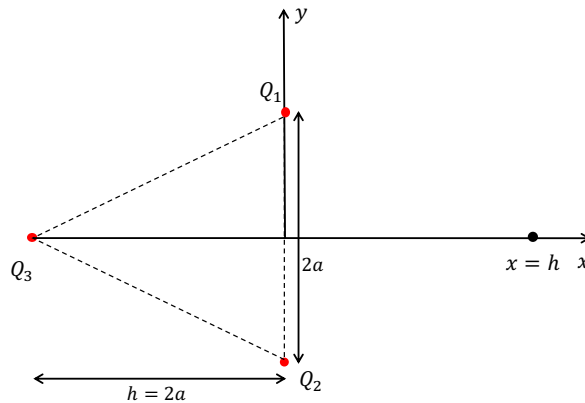


Figura 1: Geometria del problema 1

## Soluzione del problema 1

a)

Il potenziale  $V_i(\underline{r})$  generato nel punto  $\underline{r}$  da una carica puntiforme di valore  $q_i$  posizionata in  $\underline{r}_i$  è dato dall'espressione:

$$V_i(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \quad (1)$$

I vettori posizione delle tre cariche sono  $\underline{r}_1 = a\hat{y}$ ,  $\underline{r}_2 = -a\hat{y}$ ,  $\underline{r}_3 = -2a\hat{x}$  mentre il vettore posizione del punto di osservazione è  $\underline{r} = 2a\hat{x}$ .

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, in un punto  $x$  qualsiasi dell'asse  $y$  si ha:

$$V(\underline{r}) = V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q_1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{Q_3}{(x + 2a)} \right\} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(Q_1 + Q_2)}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{Q_3}{(x + 2a)} \right\} [V] \quad (3)$$

Imponendo la condizione  $V(2a) = 0$  si ottiene:

$$V(2a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(Q_1 + Q_2)}{\sqrt{4a^2 + a^2}} + \frac{Q_3}{(2a + 2a)} \right\} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left\{ \frac{(Q_1 + Q_2)}{\sqrt{5}} + \frac{Q_3}{4} \right\} = 0 \quad (5)$$

da cui si ricava:

$$Q_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}(Q_1 + Q_2) = -\frac{4}{\sqrt{5}} [\mu C] \quad (6)$$

**b)**

Per definizione il lavoro fatto contro le forze del campo per portare una carica positiva unitaria dal punto  $x = h$  al punto  $x = 0$  è non dipende dal cammino percorso ma solo dalla differenza di potenziale  $\Delta V$  tra i due punti:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{dl} = V(0) - V(2a) \quad (7)$$

Nel nostro caso, essendo  $V(2a) = 0$  e  $a = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$ , si ha

$$\Delta V = V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{10^{-6}}{a} + \frac{Q_3}{2a} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10^{-6}}{a} \left\{ \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \right\} = \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\sqrt{5}} = 8.0389 \cdot 10^3 [V] \quad (8)$$

Il lavoro  $L$  fatto per portare la carica  $q$  è quindi:

$$L = \Delta V q = V(0)q = \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\sqrt{5}} q \cong 1.8 \cdot 10^4 [J] \quad (9)$$

**Problema 2** (8 punti) Un condensatore cilindrico, ideale, in aria, a sezione circolare e di lunghezza  $L$  è costituito da un'armatura cilindrica esterna di raggio  $b$  coassiale ad un'armatura interna cilindrica di raggio  $a$ . Il condensatore viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale tra le due armature di  $\Delta V_0 = V_1 - V_2$  [V], e quindi isolato. Successivamente viene introdotto un guscio cilindrico di materiale dielettrico, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  che riempie totalmente l'intercapedine tra le due armature per una lunghezza  $d$  (vedi figura 2).

- Determinare l'espressione del rapporto  $\Delta V_N / \Delta V_0$  tra la differenza di potenziale  $\Delta V_N$  tra le armature del condensatore dopo l'introduzione del dielettrico, e la differenza di potenziale iniziale  $\Delta V_0$ .
- Calcolare le quantità di carica  $Q_1$  e  $Q_2$  che si depositano sulla parte delle armature affacciate alla sola parte di dielettrico e sulla parte in aria rispettivamente, in funzione della quantità di carica iniziale  $Q$  del condensatore, nell'ipotesi che  $\epsilon_r = 4$  e che  $d = L/3$ .

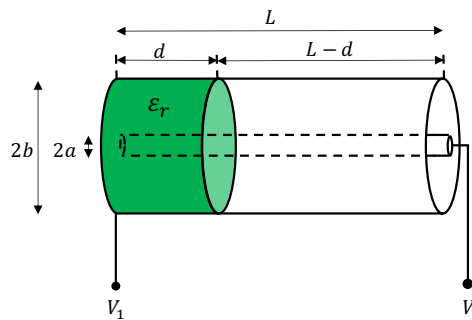


Figura 2: Geometria del problema 2

## Soluzione del problema 2

a)

La capacità del condensatore cilindrico in aria è:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (10)$$

La carica iniziale  $Q$  sulle armature del condensatore piano può essere calcolata ricordando che  $Q = C\Delta V$  per cui

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Delta V_0 \quad (11)$$

Un volta introdotta la struttura la carica rimane invariata perché il condensatore viene isolato. La nuova differenza di potenziale che si stabilisce tra le armature dipende dalla capacità del condensatore dopo l'introduzione della struttura. In questo caso il condensatore può essere visto come il parallelo di due condensatori cilindrici (vedi figura 3). Le capacità dei singoli condensatori sono

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r d}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 (L-d)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (13)$$

La capacità totale di due condensatori in parallelo è la somma delle capacità per cui si ha:

$$C_T = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r d}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2\pi\epsilon_0 (L-d)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (14)$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} [d(\epsilon_r - 1) + L] \quad (15)$$

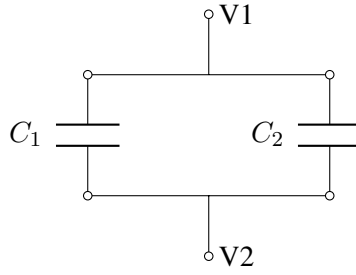


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

La differenza di potenziale  $\Delta V_N$  nella nuova configurazione è

$$\Delta V_N = \frac{Q}{C_T} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Delta V_0 \cdot \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{[d(\epsilon_r - 1) + L]} \quad (16)$$

$$= \Delta V_0 \cdot \frac{L}{[d(\epsilon_r - 1) + L]} \quad (17)$$

quindi:

$$\frac{\Delta V_N}{\Delta V_0} = \frac{L}{[d(\epsilon_r - 1) + L]} \quad (18)$$

**b)**

Nell'ipotesi che  $\epsilon_r = 4$  e  $d = L/3$  la differenza di potenziale tra le armature in presenza di dielettrico è:

$$\Delta V_N = \frac{L}{[d(\epsilon_r - 1) + L]} \Delta V_0 = \frac{\Delta V_0}{2} \quad (19)$$

La quantità di carica affacciata sulle armature nella parte di dielettrico è:

$$Q_1 = C_1 \Delta V_N = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r d}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\Delta V_0}{2} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\Delta V_0}{2} \frac{4}{3} = \frac{2}{3} Q \quad (20)$$

La quantità di carica affacciata sulle armature nella parte in aria è:

$$Q_2 = C_2 \Delta V_N = \frac{2\pi\epsilon_0 (L - d)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\Delta V_0}{2} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\Delta V_0}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{3} Q \quad (21)$$

**Problema 3** (8 punti) Un solenoide idealmente infinito a sezione circolare, di raggio  $a$  e numero di spire per unità di lunghezza  $N$  ha l'asse di simmetria disposto lungo l'asse  $y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, ed è percorsa da una corrente stazionaria  $I_0$  che scorre in senso antiorario rispetto alla normale  $\hat{y}$  alla sezione circolare. All'interno del solenoide è disposta una piccola spira conduttrice a forma di triangolo equilatero, di lato  $l$ , con un lato disposto lungo l'asse  $x$  simmetricamente rispetto all'origine e con il piano della spira coincidente con il piano  $x - y$ , come in figura 4. La spira triangolare, di resistenza elettrica  $R = 25 \Omega$ , è collegata ad un generatore di f.e.m costante  $\mathcal{E}_0 = 100 V$ , tale per cui la corrente  $I_s$  che scorre nella spira sia orientata come in figura. Determinare:

- l'espressione analitica di ciascuna forza magnetica agente sui 3 tratti rettilinei della spira e si verifichi, sommando le espressioni trovate, che la risultante che agisce sul circuito chiuso è nulla;
- il valore della corrente  $I_0$  tale che il momento meccanico che si esercita sulla spira valga in modulo  $|\underline{M}| = 0.003 N \cdot m$ , nell'ipotesi che  $N = 5441 \text{ spire/m}$ ,  $l = 5 \text{ cm}$ ,  $a = 15 \text{ cm}$ .

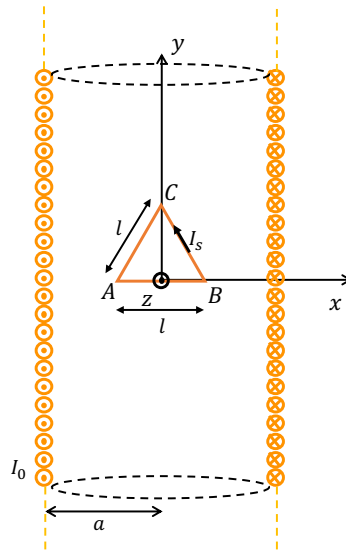


Figura 4: Geometria del problema 3

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

### Soluzione del problema 3

a)

Il vettore induzione magnetica generato da un solenoide infinito è uniforme all'interno di questo ed è dato da :

$$\underline{B}_0 = \mu_0 N I_0 \hat{y} \quad (22)$$

I tre tratti  $\underline{AB}$ ,  $\underline{BC}$  e  $\underline{CA}$  orientati possono essere scritti vettorialmente come:

$$\underline{AB} = l \hat{x} \quad (23)$$

$$\underline{BC} = l [-\cos(60^\circ) \hat{x} + \sin(60^\circ) \hat{y}] = l \left[ -\frac{1}{2} \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} \right] \quad (24)$$

$$\underline{CA} = l [-\cos(60^\circ) \hat{x} - \sin(60^\circ) \hat{y}] = l \left[ -\frac{1}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} \right] \quad (25)$$

$$(26)$$

La forza magnetica agente su ciascuno di questi tratti può essere scritta come:

$$\underline{F}_i = I_s \underline{L}_i \times \underline{B}_1 \quad (27)$$

dove  $\underline{L}_i$  con  $i = 1, 2, 3$  indica il lato orientato della spira percorso da corrente  $I_s$ . Le tre forze agenti sono quindi :

$$\underline{F}_1 = I_s \underline{AB} \times \underline{B}_0 = I_s (l\hat{x}) \times (\mu_0 N I_0 \hat{y}) = I_s l \mu_0 N I_0 \hat{z} \quad (28)$$

$$\underline{F}_2 = I_s \underline{BC} \times \underline{B}_0 = I_s l \left[ -\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} \right] \times (\mu_0 N I_0 \hat{y}) = -I_s l \mu_0 N I_0 \frac{1}{2} \hat{z} \quad (29)$$

$$\underline{F}_3 = I_s \underline{CA} \times \underline{B}_0 = I_s l \left[ -\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} \right] \times (\mu_0 N I_0 \hat{y}) = -I_s l \mu_0 N I_0 \frac{1}{2} \hat{z} \quad (30)$$

Sommando le tre espressioni:

$$\underline{F}_{tot} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = I_s l \mu_0 N I_0 \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \hat{z} = 0 \quad (31)$$

**b)**

Il momento magnetico è  $\underline{m} = I_s S \hat{n}$  dove  $\hat{n}$  vede circolare la corrente in senso antiorario. Dato il verso di percorrenza della corrente si ha  $\hat{n} = \hat{z}$ . L'area della spira è  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$  per cui il momento magnetico è

$$\underline{m} = I_s \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \hat{z} \quad [A \cdot m^2] \quad (32)$$

Il momento meccanico che agisce sulla spira è dato da  $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}_1$  da cui

$$\underline{M} = (I_s \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \hat{z}) \times (\mu_0 N I_0 \hat{y}) = -\mu_0 N I_0 I_s \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \hat{x} \quad [N \cdot m] \quad (33)$$

Il modulo del momento meccanico è:

$$|\underline{M}| = \mu_0 N I_0 I_s \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \quad (34)$$

Ricavando la corrente  $I_0$  si ha:

$$I_0 = \frac{|\underline{M}|}{\mu_0 N I_s \frac{\sqrt{3}}{4} l^2} \quad (35)$$

L'intensità della corrente che circola nella spira è:

$$I_s = \frac{100}{25} A \quad (36)$$

Sostituendo i valori nella (35)

$$I_0 = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} (5441) \left(\frac{100}{25}\right) \frac{\sqrt{3}}{4} 25 \cdot 10^{-4}} \cong 100 [A] \quad (37)$$

**Problema 4** (8 punti) Una spira rettangolare conduttrice di lati  $l$  e  $2l$ , giace sul piano  $x - y$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, disposta come in figura 5. La spira conduttrice è costituita da un filo conduttore di resistenza totale  $R = 10 \Omega$ . Un filo rettilineo infinito, percorso da corrente variabile  $\underline{I}(t) = -I(t)\hat{y}$  giace sullo stesso piano della spira, posizionato in  $x_1 = -d\hat{x}$  con  $d = \frac{3}{2}l$ , ed è parallelo ai due lati maggiori della spira rettangolare. Nell'ipotesi che la corrente  $I_1(t)$  vari sinusoidalmente nel tempo con legge  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$  con  $\omega = 2\pi f$  determinare:

- l'espressione esplicita del flusso totale del vettore induzione  $\underline{B}$  attraverso la spira all'istante  $t$ , in funzione della variabile  $l$  e della corrente;
- l'ampiezza e il senso di percorrenza della corrente che circola nella spira all'istante  $t = \frac{1}{6} \cdot 10^{-2} \text{ sec}$  quando  $I_0 = 20 \text{ A}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{6}$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ , e  $f = 50 \text{ Hz}$ .

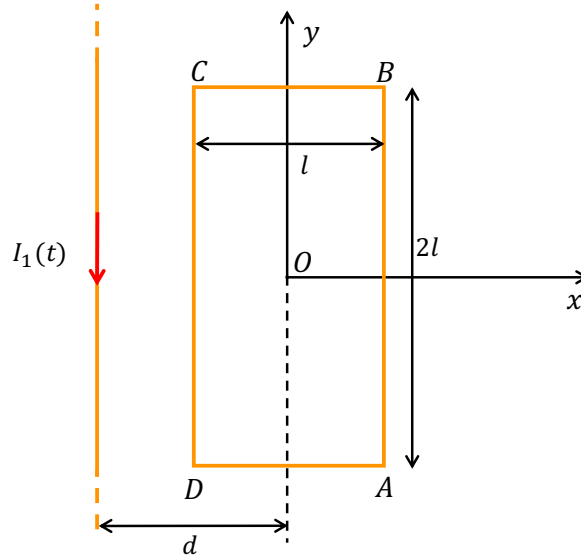


Figura 5: Geometria del problema 3

## Soluzione del problema 4

a)

L'asse  $\hat{z}$  del sistema di riferimento cartesiano è uscente nel foglio. La legge di Biot-Savart afferma che il campo magnetico generato dal filo rettilineo percorso da corrente  $I(t)$  in tutti punti sul piano  $x - y$  è:

$$\underline{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{(x+d)} \hat{z} \quad (38)$$

dove  $(x+d)$  è la distanza del punto di osservazione  $P = (x, y)$  interno alla spira dal filo, cioè per  $-l/2 \leq x \leq l/2$ .

Il flusso magnetico attraverso l'area della spira può essere calcolato come

$$\Phi(\underline{B}) = \int_{-l}^l \int_{-l/2}^{l/2} \underline{B}(x) \cdot \hat{z} dx dy \quad (39)$$

Sostituendo l'espressione (38) si ottiene:

$$\Phi(\underline{B}) = \int_{-l}^l \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{(x+d)} \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy = \frac{\mu_0 I(t) 2l}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{(x+d)} dx \quad (40)$$

Il calcolo dell'integrale si può effettuare con il cambiamento di variabile  $u = (x + d)$  per cui è  $du = dx$ .

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{(x + d)} dx = \int_{d-l/2}^{d+l/2} \frac{1}{u} du = \ln \left[ \frac{(d + \frac{l}{2})}{(d - \frac{l}{2})} \right] \quad (41)$$

Il flusso magnetico è quindi:

$$\Phi(\underline{B}) = \mu_0 I_0 \sin(\omega t + \phi) \frac{l}{\pi} \ln \left[ \frac{(d + \frac{l}{2})}{(d - \frac{l}{2})} \right] = \mu_0 \frac{l}{\pi} (\ln 2) I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (42)$$

**b)**

La forza elettromotrice indotta dalla variazione di flusso è data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d\Phi(\underline{B})}{dt} = -\mu_0 \frac{l}{\pi} (\ln 2) I_0 \omega \cos(\omega t + \phi) \quad (43)$$

Con i valori indicati, all'istante  $t = 1/6 \cdot 10^{-2} \text{ sec}$  la forza elettromotrice indotta è:

$$\mathcal{E}_i \left( \frac{1}{600} \right) = -\mu_0 \frac{0.1}{\pi} (\ln 2) (20) (100\pi) \cos \left( 100\pi \frac{1}{600} + \frac{\pi}{6} \right) \quad (44)$$

$$= -\mu_0 (\ln 2) (200) \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = -4\pi \cdot 10^{-7} (\ln 2) (200) \frac{1}{2} \quad (45)$$

$$= -4\pi \cdot 10^{-5} (\ln 2) = -8.71 \cdot 10^{-5} \text{ V} \quad (46)$$

L'ampiezza della corrente che circola è quindi:

$$I_s = \left| \frac{\mathcal{E}_0 \left( \frac{1}{600} \right)}{R} \right| = \frac{8.71}{10} \cdot 10^{-5} = 0.871 \cdot 10^{-5} \text{ A} \quad (47)$$

Poiché al tempo indicato il fattore  $\sin(\omega t + \phi)$  sta aumentando, significa che anche il flusso sta aumentando per cui la corrente deve circolare in senso orario.