

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2023-2024)

9 Aprile 2024

$$\left(\varepsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (11 punti) Nel volume di un cilindro isolante a sezione circolare di raggio $R_1 = 30 \text{ cm}$ infinitamente lungo è distribuita una densità volumetrica di carica elettrica $\rho_v(\rho) = \gamma_0 \left(\frac{\rho}{R_1} \right) \frac{C}{m^3}$ dove $\gamma_0 = 2.125 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3$ è una costante ed ρ rappresenta la distanza dall'asse del cilindro. In posizione concentrica rispetto alla distribuzione cilindrica di carica è presente un guscio cilindrico di materiale dielettrico, lineare, omogeneo, isotropo, caratterizzato da una costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 4.4$, di raggio interno R_1 ed esterno $R_2 = 3R_1$. Esternamente al guscio c'è il vuoto. Determinare, rispetto al sistema di riferimento scelto:

- il vettore campo elettrico nelle regioni $\rho < R_1$, $R_1 < \rho < R_2$ e $\rho > R_2$;
- il valore del potenziale elettrostatico $V(R_2)$ sulla superficie esterna del dielettrico sapendo che il potenziale sull'asse è $V(0) = 10 \text{ V}$.

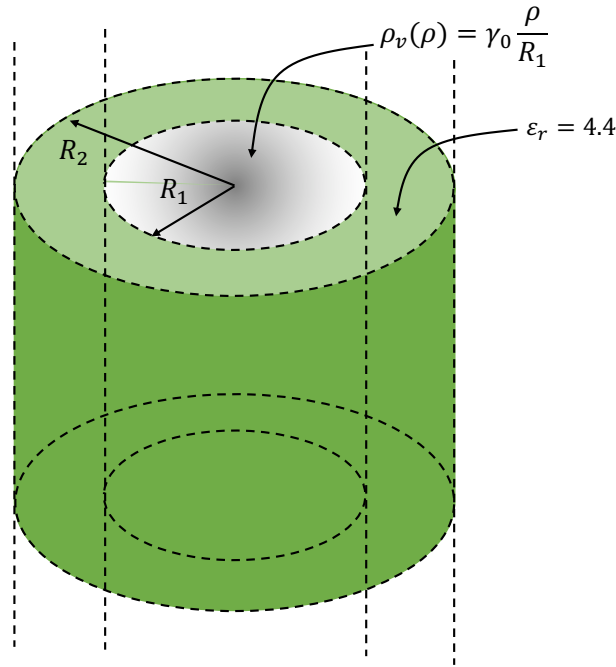


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)

Consideriamo un sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) , con origine sull'asse della geometria cilindrica. Vista la simmetria si può utilizzare il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie di Gauss cilindrica di raggio ρ ed altezza L , per entrambe le tre regioni di interesse. Essendo il campo elettrico, per simmetria cilindrica diretto solo radialmente in tutti i punti della superficie di Gauss avremo

$$D_\rho(\rho) \cdot 2\pi\rho L = Q(\rho) \quad (1)$$

dove $Q(\rho)$ è la carica totale libera contenuta all'interno della superficie di Gauss cilindrica.

1) $\rho < R_1$. In questo caso la relazione costitutiva tra campo elettrico ed induzione elettrica è $\underline{D}(\rho) = \varepsilon_0 \underline{E}(\rho)$. La carica totale libera contenuta all'interno della superficie sferica di Gauss di raggio generico ρ è data da :

$$Q(\rho) = \iiint_V \rho_v(\underline{r}') dv' = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \int_0^L \gamma_0 \left(\frac{\rho'}{R_1} \right) \rho' d\rho' d\phi' dz' \quad (2)$$

$$= \frac{\gamma_0}{R_1} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^\rho (\rho')^2 d\rho' d\phi' dz' = \frac{\gamma_0}{R_1} 2\pi L \frac{(\rho')^3}{3} \Big|_0^\rho \quad (3)$$

$$= \frac{\gamma_0 2\pi L}{R_1} \rho^3 \quad (4)$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$D_\rho(\rho) = \frac{\gamma_0}{3R_1} \rho^2 \quad (5)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_1(\rho) = \frac{\gamma_0 \rho^2}{3\varepsilon_0 R_1} \hat{\rho} \cong 266.67 \rho^2 \hat{\rho} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (6)$$

2) $R_1 < \rho < R_2$. In questo caso la relazione costitutiva tra campo elettrico ed induzione elettrica è $\underline{D}(\rho) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E}(\rho)$. La carica totale presente all'interno della superficie di Gauss di raggio ρ , è tutta quella dovuta alla distribuzione volumetrica di raggio $\rho = R_1$ ed è data da

$$Q(\rho)|_{\rho=R_1} = \gamma_0 2\pi L \frac{R_1^2}{3} \quad (7)$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$D_\rho(\rho) = \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\rho} \quad (8)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_2(\rho) = \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r \rho} \hat{\rho} \cong \frac{1.64}{\rho} \hat{\rho} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (9)$$

3) $\rho > R_2$. Nel vuoto la relazione costitutiva tra campo elettrico ed induzione elettrica è $\underline{D}(\rho) = \varepsilon_0 \underline{E}(\rho)$. La carica totale presente all'interno della superficie di Gauss di raggio $\rho > R_2$ è ancora data dalla (7) per cui si ottiene ancora l'espressione (8). Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_3(\rho) = \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho} \cong \frac{7.2}{\rho} \hat{\rho} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (10)$$

b)

La differenza di potenziale $\Delta V = V(R_2) - V(0)$ tra un punto sull'asse e un punto sulla superficie esterna del dielettrico lungo un cammino rettilineo radiale è data da

$$V(R_2) - V(0) = - \int_0^{R_1} \underline{E}_1(\rho) \cdot \hat{\rho} d\rho - \int_{R_1}^{R_2} \underline{E}_2(\rho) \cdot \hat{\rho} d\rho \quad (11)$$

Da questa si ottiene

$$V(R_2) = V(0) - \int_0^{R_1} \frac{\gamma_0 \rho^2}{3\varepsilon_0 R_1} \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} d\rho - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r \rho} \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} d\rho = V(0) - \frac{\gamma_0}{3\varepsilon_0 R_1} \int_0^{R_1} \rho^2 d\rho - \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho \quad (12)$$

$$= V(0) - \frac{\gamma_0}{3\varepsilon_0 R_1} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{R_1} - \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = V(0) - \frac{\gamma_0}{3\varepsilon_0 R_1} \frac{R_1^3}{3} - \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \quad (13)$$

$$= V(0) - \frac{\gamma_0 R_1^2}{3\varepsilon_0} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\varepsilon_r} \ln(3) \right] \quad (14)$$

$$(15)$$

Sostituendo i valori si ottiene infine $V(R_2) \cong 5.8 \text{ V}$

Problema 2 (11 punti) Si consideri il circuito di figura 2, dove i tutti i condensatori sono inizialmente scarichi e gli interruttori aperti. Nella prima fase si chiude l'interruttore S_1 e si lascia aperto S_2 . Una volta raggiunta la condizione di equilibrio, nella seconda fase si apre S_1 e si chiude S_2 . Nell'ipotesi che sia $C_1 = 2C$, $C_2 = (3/2)C$, $C_3 = C_4 = C = 100$ [pF] e che $\Delta V = 20$ [V], determinare all'equilibrio della fase 2:

- la differenza di potenziale tra i punti A e D ;
- il valore della carica sul condensatore di capacità $\frac{3}{2}C$.

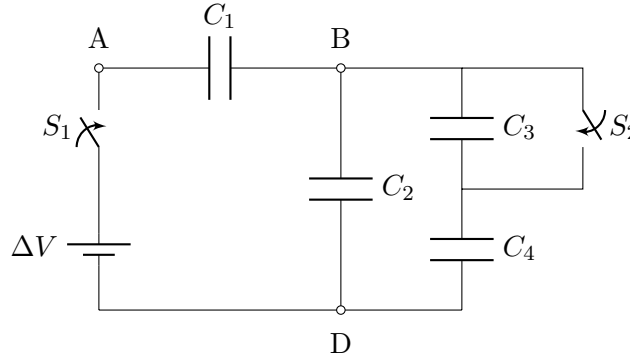


Figura 2: Circuito equivalente del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

Con l'interruttore S_1 chiuso e l'interruttore S_2 aperto il generatore carica tutti i condensatori. La capacità totale della serie dei due condensatori C_3 e C_4 è:

$$C_s = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{C}{2} = 50 \text{ pF} \quad (16)$$

La capacità totale del parallelo tra C_2 e C_s è

$$C_{p1} = \frac{3}{2}C + \frac{C}{2} = 2C = 200 \text{ pF} \quad (17)$$

Infine la capacità totale della serie tra C_1 e C_{p1} è:

$$C_{t1} = \frac{C_1 C_{p1}}{C_1 + C_{p1}} = C = 100 \text{ pF} \quad (18)$$

Il circuito equivalente è Alla fine del processo di carica la quantità di carica presente sulle armature di C_t è

$$Q_1 = C_{t1} \Delta V = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (19)$$

Successivamente l'interruttore S_1 viene aperto e l'interruttore S_2 chiuso. La carica totale rimane invariata perché con S_1 aperto il sistema è isolato. La chiusura di S_2 cortocircuita il condensatore C_3 e il circuito equivalente per la fase 2 è mostrato in figura 4.

La capacità totale del parallelo tra C_2 e C_4 è:

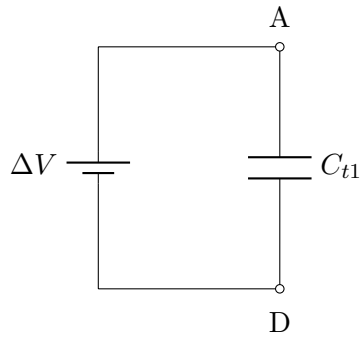
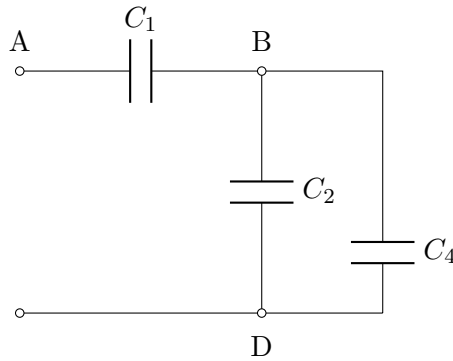
$$C_{p2} = \frac{3}{2}C + C = \frac{5}{2}C = 250 \text{ pF} \quad (20)$$

Infine la capacità totale della serie tra C_1 e C_{p2} è:

$$C_{t2} = \frac{C_1 C_{p2}}{C_1 + C_{p2}} = \frac{10}{9}C \cong 111,12 \text{ pF} \quad (21)$$

La differenza di potenziale tra i punti A e D è quindi:

$$\Delta V_{AD} = \frac{Q_1}{C_{t2}} = \frac{9}{10} \Delta V = 18 \text{ V} \quad (22)$$


 Figura 3: Circuito equivalente all'equilibrio con S_1 chiuso e S_2 aperto

 Figura 4: Circuito equivalente all'equilibrio con S_1 aperto e S_2 chiuso

b)

All'equilibrio, la differenza di potenziale tra i punti B e D si può calcolare ricordando che sulla capacità equivalente C_{p2} è presente la carica iniziale:

$$\Delta V_{BD} = \frac{Q_1}{C_{p2}} = \frac{2}{5} \Delta V = 8 \text{ V} \quad (23)$$

Le cariche localizzata sulle armature di C_2 e C_4 sono dunque:

$$Q_2 = \frac{3}{2} C \cdot \Delta V_{BD} = 1.2 \text{ nC} \quad (24)$$

$$Q_4 = C \cdot \Delta V_{BD} = 0.8 \text{ nC} \quad (25)$$

Problema 3 (11 punti) Sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è presente, nel semispazio $x > 0$, un campo di induzione magnetica uniforme $\underline{B} = 771 \cdot 10^{-3} \hat{z} \text{ T}$. Un circuito rigido è formato da una barretta rigida rettilinea QP disposta lungo l'asse y e da una semicirconferenza di raggio $a = 0.8 \text{ m}$, che congiunge i punti Q e P . Il materiale conduttore che forma il circuito rigido ha sezione circolare costante di raggio $b = 0.5 \text{ mm}$ e conducibilità $\sigma = 1.745 \cdot 10^6 \text{ [m} \cdot \Omega]^{-1}$. Il circuito rigido è vincolato a ruotare intorno al diametro QP con velocità angolare costante ω in senso antiorario rispetto a y . Si consideri che all'istante iniziale $t = t_0 = 0$ la spira sia complanare con il piano xy come in figura 5. Sapendo che il circuito compie un giro completo in $\Delta t = 0.02$ secondi determinare:

- l'espressione della corrente indotta e gli intervalli di tempo in cui detta corrente è non nulla;
- la potenza elettrica istantanea dissipata all'istante di tempo $t^* = 0.0175 \text{ s}$.

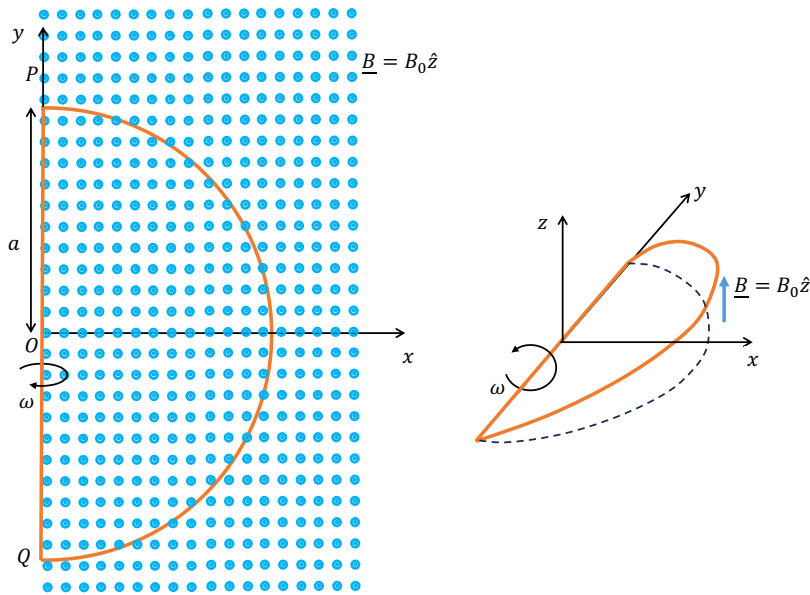


Figura 5: Geometria del problema 3

Soluzione al problema 4

La resistività del materiale conduttore è $\rho = 1/\sigma \cong 5.73 \cdot 10^{-7} \text{ [m} \cdot \Omega]$. La lunghezza totale del circuito chiuso è $L = (2 + \pi)a$ per cui la resistenza elettrica totale è

$$R = \frac{\rho L}{\pi b^2} \cong 3 \text{ } \Omega \quad (26)$$

Il circuito ruota di 360° in 0.2 secondi per cui la velocità angolare è

$$\omega = \frac{2\pi}{0.02} = 100\pi \text{ } \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (27)$$

Il campo di induzione magnetica è costante nel tempo, per cui la variazione del flusso magnetico che induce la f.e.m. è dovuta alla variazione dell'area del circuito proiettata sul piano perpendicolare a $\underline{B}$, durante la rotazione.

Consideriamo un generico istante di tempo t nell'intervallo di tempo $\Delta t_a \in [0, t_1]$, dove $t_1 = 0.005 \text{ s}$ indica l'istante di tempo in cui il circuito esce completamente dalla zona interessata dal campo di induzione magnetica, dopo un quarto di giro. Poiché il campo di induzione è costante, indicando con $\hat{n}$ la normale al piano della spira, il flusso all'istante t è

$$\Phi(t) = [B_z \hat{z}] \cdot \left[\frac{\pi a^2}{2} \hat{n} \right] \text{ Wb} \quad (28)$$

Se indichiamo con $\theta(t)$ l'angolo variabile tra la normale $\hat{n}$ e l'asse z , essendo per $t = 0$, $\theta(0) = 0$, si ha che $\hat{z} \cdot \hat{n} = \cos[\theta(t)] = \cos(\omega t)$. Il flusso si può scrivere quindi come

$$\Phi(t) = B_z \frac{\pi a^2}{2} \cos(\omega t) \quad \text{Wb} \quad (29)$$

dove $0 < (\omega t) < \frac{\pi}{2}$. Durante questo intervallo di tempo il flusso attraverso la spira diminuisce. Dopo aver percorso mezzo giro in una zona non interessata dalla induzione magnetica il circuito rientrerà nel campo di induzione a partire dall'istante di tempo $t_2 = 0.015 \text{ s}$.

Consideriamo quindi un generico istante di tempo t nell'intervallo di tempo $\Delta t_b \in [t_2, t_3]$, dove $t_3 = 0.02 \text{ s}$ indica l'istante di tempo in cui il circuito ritorna nella posizione di partenza. Analogamente a quanto derivato per l'intervallo precedente, possiamo scrivere il flusso totale all'istante t come:

$$\Phi(t) = B_z \frac{\pi a^2}{2} \cos(\omega t) \quad \text{Wb} \quad (30)$$

dove $\frac{3\pi}{2} < (\omega t) < 2\pi$. Durante questo intervallo di tempo il flusso attraverso la spira aumenta. I due intervalli di tempo in cui si avrà variazione del flusso attraverso il circuito sono $\Delta t_a \in [0, t_1]$ e $\Delta t_b \in [t_2, t_3]$. A causa della variazione di flusso, in corrispondenza di questi due intervalli di tempo sul circuito si indurrà una forza elettromotrice e di conseguenza una corrente indotta. In entrambi i casi, l'intensità della f.e.m. indotta risulta

$$\mathcal{E}_i = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_z \frac{\pi a^2}{2} \sin(\omega t) \cong 0.7751 \sin(\omega t) \quad \text{V} \quad (31)$$

L'intensità della corrente indotta è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} \cong 0.2583 \sin(\omega t) \quad \text{A} \quad (32)$$

La potenza istantanea dissipata sulla resistenza è in entrambi i casi è data da:

$$P(t) = RI(t)^2 = \frac{\left[B_z \frac{\pi a^2}{2} \sin(\omega t) \right]^2}{R} \cong 0.2 \sin^2(\omega t) \quad \text{W} \quad (33)$$

La potenza elettrica dissipata all'istante richiesto $\omega t_1 = (7\pi)/4$ è

$$P(0.175) = \frac{\left[B_z \frac{\pi a^2}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right]^2}{R} \cong 0.1 \quad \text{W} \quad (34)$$