

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2023-2024)

27 Giugno 2024

$$\left(\varepsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (11 punti) Una sfera conduttrice di raggio R_1 porta una carica totale $+Q$ ed è posizionata al centro di una cavità in aria di un guscio sferico dielettrico concentrico ad essa. Il guscio sferico ha raggio interno $R_2 = 2R_1$ e raggio esterno $R_3 = 4R_1$ e il dielettrico che lo compone ha una costante dielettrica relativa ε_r (vedi figura 1). Esternamente al guscio sferico dielettrico è presente un ulteriore guscio sferico di raggio interno R_3 e raggio esterno $R_4 = 6R_1$ in cui è distribuita una nuvola di carica elettrica con densità volumetrica $\rho_v(r) = \alpha/r \text{ C/m}^3$, essendo r la distanza radiale dal centro e α una costante. Determinare, rispetto al sistema di riferimento scelto:

- l'espressione esplicita del vettore campo elettrico nelle regioni $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$, $R_3 < r < R_4$ ed $r > R_4$;
- il valore della differenza di potenziale tra un punto A sulla superficie esterna ($r = R_4$) e un punto B sulla superficie interna ($r = R_3$) della nuvola di carica, nell'ipotesi che sia $Q = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $R_1 = 2 \text{ cm}$ e $\alpha = 1.1789 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$.

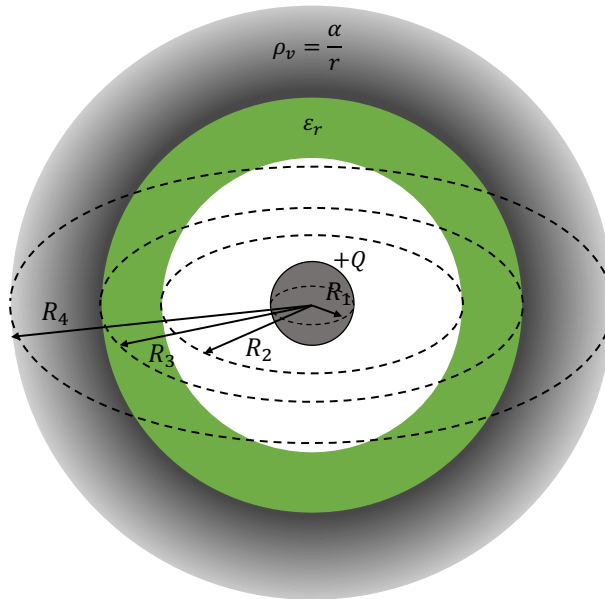


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)

La sfera conduttrice è una regione equipotenziale per cui è sufficiente calcolare il potenziale su un qualsiasi punto della sua superficie. Vista la simmetria sferica si può calcolare il campo elettrico utilizzando il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie sferica di Gauss di raggio r per i quattro casi del quesito a). Data la simmetria sferica, sia il campo elettrico che l'induzione elettrica sono diretti solo radialmente in tutti i punti della superficie di Gauss di raggio r , per cui avremo i seguenti casi:

1) $R_1 < r < R_2$. Applicando il teorema di Gauss per il campo elettrico si ottiene

$$E_{r,1} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

dove Q_{tot} è la carica totale netta contenuta all'interno della superficie di Gauss, che in questo caso coincide con la sola carica Q della sfera conduttrice. L'espressione vettoriale del campo elettrostatico è quindi:

$$\underline{E}_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (2)$$

2) $R_2 < r < R_3$. Poiché siamo all'interno di una regione dielettrica, applicando il teorema di Gauss per il campo di induzione elettrica si ottiene

$$D_{r,2} \cdot 4\pi r^2 = Q_{tot} \quad (3)$$

dove Q_{tot} è la carica totale *libera* netta contenuta all'interno della superficie di Gauss. Anche in questo caso coincide con la sola carica Q della sfera conduttrice per cui l'espressione vettoriale del campo di induzione elettrostatica è:

$$\underline{D}_2(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (4)$$

Per un dielettrico lineare, omogeneo, isotropo vale la relazione $\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}$ quindi l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (5)$$

3) $R_3 < r < R_4$. All'interno della nuvola di carica elettrica con densità $\rho_v(r) = \alpha/r$ [C/m²], la carica totale contenuta all'interno della superficie di Gauss varia in funzione del raggio di questa. Alla carica libera della sfera conduttrice $+Q$ si somma quindi una carica variabile $Q_v(r)$ data da

$$Q_v(r) = \iiint_V \rho(\underline{r}') dv' = \int_{R_3}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{r'} (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' = \alpha 4\pi \int_{R_3}^r r' dr' = \alpha 2\pi [r^2 - (R_3)^2] \quad (6)$$

Le carica totale di polarizzazione introdotta dal dielettrico all'interno della superficie di Gauss è invece sempre nulla perché le due cariche di polarizzazione sulle due superfici sono uguali ed opposte. Si può quindi applicare il teorema di Gauss per il campo elettrostatico ottenendo:

$$E_{r,3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q + \alpha 2\pi [r^2 - (R_3)^2]}{\epsilon_0} \quad (7)$$

da cui

$$\underline{E}_3(r) = \frac{Q + \alpha 2\pi [r^2 - (R_3)^2]}{\epsilon_0 4\pi r^2} \hat{r} = \underline{E}_1(r) + \frac{\alpha}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(\frac{4R_1}{r} \right)^2 \right] \hat{r} \quad (8)$$

o alternativamente

$$\underline{E}_3(r) = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} \hat{r} + \frac{Q - \alpha 32\pi (R_1)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad (9)$$

4) $r > R_4$. Sostituendo $r = R_4 = 6R_1$ nella espressione della carica volumetrica (6) si ottiene:

$$Q_v = \alpha 2\pi (36R_1^2 - 16R_1^2) = \alpha 40\pi R_1^2 \quad (10)$$

ed applicando ancora il teorema di Gauss, si ottiene in questa regione:

$$E_{r,4} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q + \alpha 40\pi R_1^2}{\epsilon_0} \quad (11)$$

da cui:

$$\underline{E}_4(r) = \frac{Q + \alpha 40\pi R_1^2}{\epsilon_0 4\pi r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q + \alpha 40\pi R_1^2)}{r^2} \hat{r} \quad (12)$$

b)

Sulle due supefici ad $r = R_3$ ed $r = R_4$ il campo elettrico è radiale e quindi normale alle superfici. Da ciò consegue che le due superfici sono equipotenziali per cui la differenza di potenziale può essere calcolata integrando il campo elettrostatico lungo il cammino orientato *radiale* che va da un punto A sulla superficie di raggio R_4 , fino ad un punto B sulla superficie di raggio R_3

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \underline{E}_3(r) \cdot \underline{dr} = \int_{R_3}^{R_4} \underline{E}_3(r) \cdot \hat{r} dr \quad (13)$$

$$(14)$$

Si ottiene quindi:

$$\Delta V_{AB} = \int_{4R_1}^{6R_1} \left[\frac{\alpha}{2\epsilon_0} + \frac{(Q - \alpha 32\pi R_1^2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right] dr \quad (15)$$

$$= \frac{\alpha}{2\epsilon_0} \int_{4R_1}^{6R_1} dr + \frac{(Q - \alpha 32\pi R_1^2)}{4\pi\epsilon_0} \int_{4R_1}^{6R_1} \frac{1}{r^2} dr \quad (16)$$

$$= \frac{\alpha R_1}{\epsilon_0} + \frac{(Q - \alpha 32\pi R_1^2)}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{4R_1}^{6R_1} \quad (17)$$

$$= \frac{\alpha R_1}{\epsilon_0} + \frac{(Q - \alpha 32\pi R_1^2)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4R_1} - \frac{1}{6R_1} \right] \quad (18)$$

$$= \frac{\alpha R_1}{\epsilon_0} + \frac{(Q - \alpha 32\pi R_1^2)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{12R_1} \right] \quad (19)$$

$$= \frac{\alpha R_1}{\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{12R_1} \right] - \frac{\alpha 32\pi R_1^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{12R_1} \right] \quad (20)$$

$$= \frac{\alpha R_1}{\epsilon_0} + \frac{Q}{48\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{\alpha 2R_1}{3\epsilon_0} \quad (21)$$

$$= \frac{\alpha R_1}{3\epsilon_0} + \frac{Q}{48\pi\epsilon_0 R_1} \cong 1000 \text{ V} \quad (22)$$

$$(23)$$

Problema 2 (11 punti) Un conduttore cilindrico cavo di raggio interno $a = 3.1831 \text{ cm}$ e raggio esterno $b = 2a$, idealmente infinito, con asse z è percorso dalla corrente stazionaria con densità *non uniforme* $\underline{J} = (\gamma/\rho)\hat{z} \text{ A/m}^2$ dove γ è una costante e ρ è la distanza radiale dall'asse z (vedi figura 2). La circuitazione $\Gamma(\underline{H})$ del campo magnetico $\underline{H}$ lungo il cammino Γ indicato in figura 2 costituito da una semicirconferenza di raggio $R_\Gamma = 12a$ e da un tratto rettilineo coincidente con l'asse x , è $\Gamma(\underline{H}) = 20 \text{ A}$. Si determini il valore della costante γ e della corrente totale che fluisce nel conduttore.

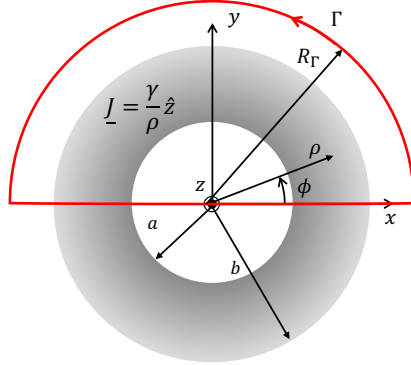


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

Il teorema della circuitazione di Ampere nel vuoto afferma che la circuitazione del vettore campo magnetico lungo un cammino chiuso orientato Γ che costituisce il bordo di una superficie aperta S (superficie ombreggiata di arancione in figura 3) dipende solo dalle correnti di conduzione che attraversano la superficie S secondo la relazione.

$$\oint_{\Gamma} \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = \iint_S \underline{J}(\underline{r}') \cdot \hat{n} ds' \quad (24)$$

Data la natura bidimensionale del problema, consideriamo un sistema di riferimento cilindrico (ρ, ϕ, z) come in figura 2. La densità di corrente *non* è uniforme sulla sezione ma ha comunque una simmetria circolare

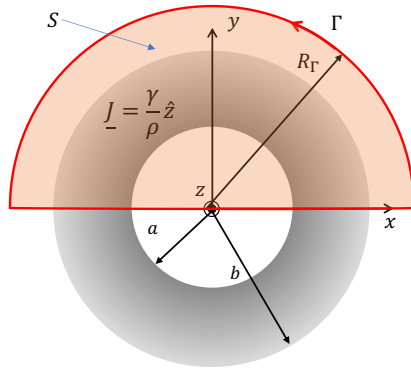


Figura 3: Superficie aperta S che ha come contorno orientato Γ

(indipendente da ϕ). La corrente totale I_Γ che attraversa la superficie aperta S , di cui il cammino chiuso Γ costituisce il bordo, è quella che fluisce attraverso metà della superficie del conduttore (vedi figura 3). Rispetto alle coordinate (ρ, ϕ) del sistema di riferimento cilindrico utilizzato, questa metà di superficie ha come limiti $a < \rho' < b$ e $0 < \phi' < \pi$. Di conseguenza:

$$I_\Gamma = \iint_S \underline{J}(\rho') \cdot \hat{z} ds' = \int_0^\pi \int_a^b \left(\frac{\gamma}{\rho'} \right) \hat{z} \cdot \hat{z} \rho' d\rho' d\phi' = \gamma \int_0^\pi \int_a^{2a} d\rho' d\phi' = \pi\gamma a \text{ A} \quad (25)$$

Uguagliando alla circuitazione si ha

$$\Gamma(\underline{H}) = \pi\gamma a \quad (26)$$

da cui

$$\gamma = \frac{\Gamma(\underline{H})}{\pi a} \cong 200 \quad (27)$$

La corrente totale è infine il doppio di quella che fluisce attraverso la superficie S , per cui

$$I = 2\pi\gamma a = 40 \quad \text{A} \quad (28)$$

Problema 3 (11 punti) Una sbarra conduttrice rigida si appoggia su due binari conduttori rettilinei paralleli all'asse x di un sistema di riferimento cartesiano. I due binari sono collegati elettricamente in corrispondenza dell'asse y da un conduttore rettilineo di lunghezza a e resistenza totale R , come mostrato in figura 4. La sbarra, partendo dal punto $x_0 = a$ viene fatta muovere con velocità costante $\underline{v}_0 = v_0 \hat{x}$ rimanendo sempre parallela all'asse y . Tutto il sistema è immerso in un campo di magnetostatico *non uniforme* di induzione magnetica $\underline{B} = (C/x) \hat{z}$ T uscente dal foglio, che si estende da $x_0 = a$ a $x_1 = a + L$.

- l'espressione esplicita della tensione e della corrente indotta (indicare anche il verso di percorrenza) durante l'intervallo di tempo in cui la sbarretta si muove all'interno del campo di induzione;
- il valore della potenza istantanea dissipata sulla resistenza R nell'istante di tempo in cui la sbarretta si trova nella posizione $x^* = a + L/2$, nell'ipotesi che sia $a = 20$ cm, $L = 30$ cm, $R = 50$ Ω , $C = 58.335$ T $\cdot$ m e $v_0 = 0.3$ m/s.

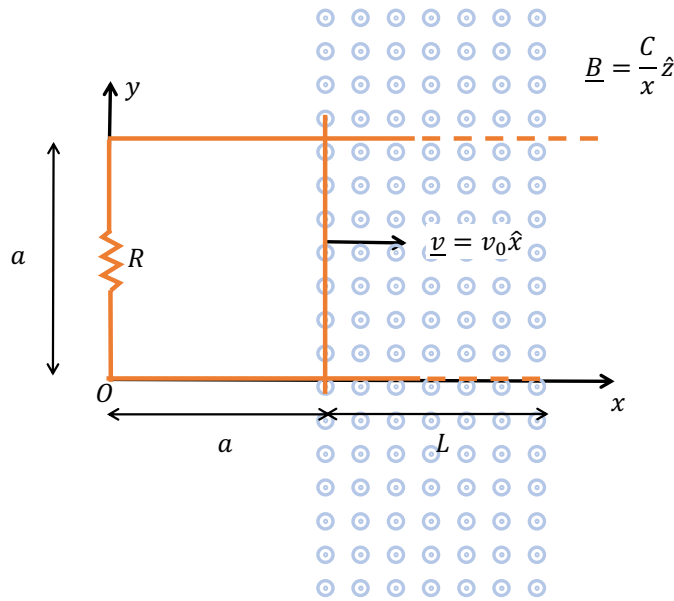


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

Poiché la sbarretta parte dalla posizione $x_0 = a$ all'istante $t_0 = 0$, la posizione della sbarra $x(t)$ rispetto all'asse x durante il moto è data dalla legge

$$x(t) = a + v_0 t \quad (29)$$

Dalla coordinata $x(0) = a$ fino a $x(t_1) = a + L$ il campo di induzione magnetica diminuisce la propria intensità con l'inverso della distanza percorsa. Poiché il campo $\underline{B}(\underline{r})$ non è uniforme sulla area spazzolata dalla sbarra conduttrice, il flusso all'istante t è dato da:

$$\Phi(\underline{B}, t) = \iint_S \underline{B}(\underline{r}) \cdot \hat{n} ds = \int_0^a \int_a^{x(t)} \frac{C}{x} \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy \quad (30)$$

$$= Ca \int_a^{a+v_0 t} \frac{1}{x} dx dy = Ca \ln \left[\frac{a + v_0 t}{a} \right] \quad \text{Wb} \quad (31)$$

Il flusso varia dal tempo $t_0 = 0$ al tempo $t_1 = L/v_0$, dopodiché la sbarra esce dal campo di induzione magnetica e il flusso rimane costante. Il modulo della f.e.m. indotta per $0 < t < t_1$ è dunque

$$\mathcal{E}_i(t) = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \frac{Cav_0}{a + v_0 t} \quad \text{V} \quad (32)$$

La corrente indotta nel solenoide nell'intervallo di tempo considerato circola in senso *orario* e la sua ampiezza è data da

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{Cav_0}{R(a + v_0t)} \quad \text{A} \quad (33)$$

La potenza istantanea dissipata sulla resistenza è data da:

$$P(t) = \frac{(\mathcal{E}_i)^2}{R} = \frac{(Cav_0)^2}{R(a + v_0t)^2} \quad \text{W} \quad (34)$$

La sbarretta raggiunge la posizione $x^* = a + L/2$ all'istante di tempo $t^* = L/(2v_0)$ per cui la potenza istantanea dissipata è:

$$P(t^*) = \frac{(Cav_0)^2}{R(a + \frac{L}{2})^2} \cong 2 \quad \text{W} \quad (35)$$