

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2023-2024)

25 Luglio 2024

$$\left(\varepsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (11 punti) Una distribuzione lineare di carica positiva $\lambda_1 = \lambda \text{ C/m}$, è piegata in modo da formare una semicirconferenza di raggio a , giacente sul semipiano $x > 0, z = 0$. Sul piano $x < 0, z = 0$, è presente una distribuzione rettilinea lineare di carica negativa di densità $\lambda_2 = -\lambda \text{ C/m}$ e lunghezza $L = 2a$, disposta sul semiasse delle x negative ad una distanza $d = a/2$ dall'origine come mostrato in (figura 1). Calcolare l'espressione esplicita del vettore campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento.

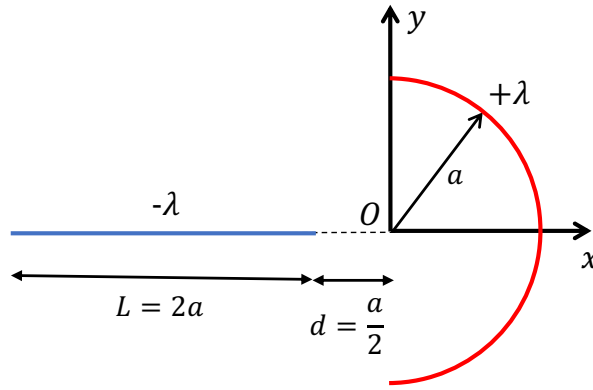


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

Ricordiamo anzitutto che il campo elettrostatico $\underline{E}(\underline{r})$ generato in un punto di osservazione $\underline{r}$ da una distribuzione lineare l di densità di carica $\lambda(\underline{r}')$ è

$$\underline{E}(\underline{r}) = k_e \int_l \frac{\lambda(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') d\ell' \quad (1)$$

dove si è indicato con k_e la costante

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (2)$$

Consideriamo inizialmente la semicirconferenza con distribuzione lineare di densità di carica uniforme positiva. Sia ϕ' una coordinata angolare, che cresce da x verso y ed è nulla in corrispondenza dell'asse x . Utilizzando la coordinata angolare ϕ' , il tratto infinitesimo di circonferenza $d\ell'$, su cui è localizzata la carica infinitesima positiva $dq = \lambda d\ell'$ può essere espresso da

$$d\ell' = a d\phi' \quad (3)$$

mentre il vettore $\underline{r}'$ che individua la posizione di tale carica infinitesima è:

$$\underline{r}' = a \sin \phi' \hat{x} + a \cos \phi' \hat{y} \quad (4)$$

Il contributo di campo elettrico elementare nell'origine dovuto alla carica elementare $\lambda d\ell'$ posizionata in $\underline{r}'$ è (cfr (1)):

$$d\underline{E}_1(0,0) = k_e \frac{\lambda a d\phi'}{a^3} (-a \sin \phi' \hat{x} - a \cos \phi' \hat{y}) \frac{V}{m} \quad (5)$$

Considerando due contributi simmetrici rispetto all'asse x si osserva subito che le componenti di campo elettrico elementare lungo x si sommano, mentre le componenti lungo y si annullano. Il campo elettrico totale sarà dato solo dalla sovrapposizione delle componenti lungo x e data la simmetria pari, il campo dovuto a questa distribuzione è equivalente al doppio di quello ottenuto integrando per $\phi' \in [0, \pi/2]$:

$$\underline{E}_1(0,0) = 2k_e \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda a d\phi'}{a^3} (-a \sin \phi' \hat{x}) = -2k_e \frac{\lambda}{a} \int_0^{\pi/2} \sin \phi' d\phi' \hat{x} \quad (6)$$

$$= -2k_e \frac{\lambda}{a} \hat{x} \quad \frac{V}{m} \quad (7)$$

Consideriamo adesso il tratto rettilineo con distribuzione lineare di densità di carica $\lambda_2 = -\lambda$. Il contributo di campo elettrico elementare nell'origine dovuto alla carica elementare puntiforme $dq = -\lambda dx'$ posizionata in $\underline{r}' = -x' \hat{x}$ è dato da (cfr. (1)):

$$d\underline{E}_2(0,0) = k_e \frac{(-\lambda)dx'}{(x')^3} (-x' \hat{x}) = k_e \frac{\lambda dx'}{(x')^2} \hat{x} \quad \frac{V}{m} \quad (8)$$

Il campo elettrostatico generato nell'origine dalla distribuzione che si estende da $-(a/2 + L) = (5/2)a$ fino ad $-a/2$ è :

$$\underline{E}_2(0,0,0) = k_e \int_{-\frac{5a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{\lambda dx'}{(x')^2} \hat{x} = k_e \lambda \int_{-\frac{5a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{1}{(x')^2} dx' \hat{x} \quad (9)$$

$$= k_e \lambda \left[-\frac{1}{x'} \right]_{-\frac{5a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \hat{x} = k_e \lambda \left[\frac{2}{5a} - \frac{2}{a} \right] \hat{x} = -k_e \frac{8\lambda}{5a} \hat{x} \quad (10)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti il campo elettrico totale nell'origine è:

$$\underline{E}_t(0,0,0) = \underline{E}_1(0,0,0) + \underline{E}_2(0,0,0) \quad (11)$$

$$= -k_e \left[\frac{2\lambda}{a} + \frac{8\lambda}{5a} \right] \hat{x} = -k_e \frac{18\lambda}{5a} \hat{x} = -\frac{9}{10} \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 a} \quad \frac{V}{m} \quad (12)$$

Problema 2 (11 punti) Un condensatore sferico, ideale, è costituito da un'armatura metallica interna di raggio $R_1 = 2 \text{ cm}$ e da un'armatura metallica esterna, concentrica a quella interna, di raggio $R_2 = 4R_1$. Nell'intercapedine in aria tra le armature è presente un guscio sferico concentrico di materiale dielettrico, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$ di raggio interno $a = 2R_1$ e raggio esterno $b = 3R_1$ (vedi figura 2). Il condensatore viene caricato fino a che sulle armature si stabilisce una differenza di potenziale $\Delta V_{12} = V_1 - V_2 = 318504 \text{ V}$ e quindi isolato. Calcolare il valore delle densità superficiali di carica di polarizzazione localizzate sulla superficie interna ed esterna del dielettrico.

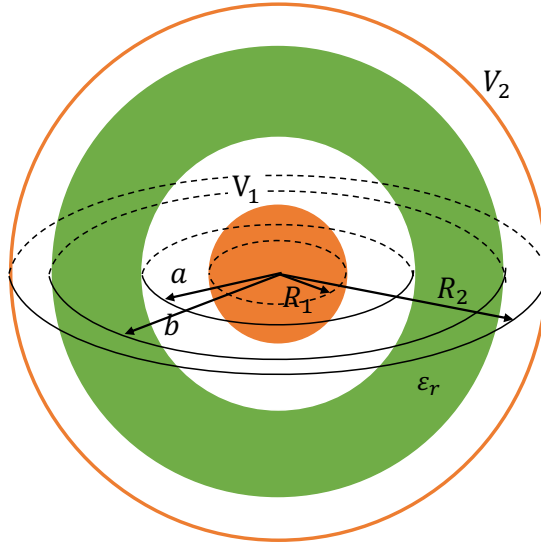


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

Per determinare le due densità di carica superficiali è necessario conoscere il vettore di polarizzazione $\underline{P}(\underline{r})$ nel dielettrico che, per un materiale omogeneo, isotropo, lineare, può essere scritto come

$$\underline{P}(\underline{r}) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\underline{E}^d(\underline{r}) \quad (13)$$

dove $\underline{E}^d(\underline{r})$ è il campo elettrico nel generico punto di osservazione $\underline{r}$ nel dielettrico. Data la simmetria sferica del problema, applicando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici ad una superficie sferica di Gauss di raggio $a < r < b$ si ottiene:

$$D_r(r)4\pi r^2 = Q \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (14)$$

dove la carica totale libera Q contenuta dalla superficie di Gauss. Poiché $V_1 > V_2$ in questo caso la carica libera sulla superficie sferica conduttrice di raggio R_1 è positiva. Il vettore induzione elettrica nel dielettrico risulta:

$$\underline{D}(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (15)$$

essendo r la distanza dal centro del sistema e $\hat{r}$ un versore diretto radialmente. Per un dielettrico omogeneo, isotropo, lineare si ha in tutti i punti interni al dielettrico $\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(\underline{r})$ Quindi il campo elettrico all'interno del dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}^d(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (16)$$

per cui:

$$\underline{P}(\underline{r}) = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (17)$$

La densità di carica di polarizzazione σ_p sulle due superfici per $r = a$ e $r = b$ possono essere calcolate ricordando che:

$$\sigma_p = \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n}|_{\underline{r} \in S} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (18)$$

per cui sulla superficie interna del guscio di raggio $r = a$ si ha:

$$\sigma_p^- = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) \Big|_{r=a} = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi a^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (19)$$

mentre sulla superficie esterna del guscio di raggio $r = b$ si ha:

$$\sigma_p^+ = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) \Big|_{r=b} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi b^2} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (20)$$

La carica totale libera Q sull'armatura interna può essere calcolata ricordando che per il condensatore in esame $Q = C_t \Delta V_{12}$ dove C_t è la capacità totale e ΔV_{12} è un dato del problema. Per il calcolo della capacità totale il condensatore può essere rappresentato come la serie di tre condensatori sferici (vedi figura 3). Le

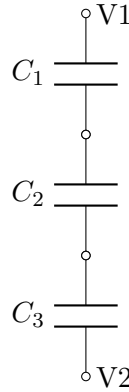


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

capacità dei singoli condensatori sono

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 a}{a - R_1} = 4\pi\epsilon_0 2R_1 \cong 44.5 \text{ pF} \quad (21)$$

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \frac{ab}{b - a} = 4\pi\epsilon_0 24R_1 \cong 534 \text{ pF} \quad (22)$$

$$C_3 = 4\pi\epsilon_0 \frac{bR_2}{R_2 - b} = 4\pi\epsilon_0 12R_1 \cong 267 \text{ pF} \quad (23)$$

L'inverso della capacità totale dei tre condensatori in serie è pari alla somma degli inversi delle singole capacità per cui si ha:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{24R_1} + \frac{1}{12R_1} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{15}{24R_1} \quad (24)$$

da cui si ottiene:

$$C_t = (4\pi\epsilon_0) \frac{24R_1}{15} \cong 35.6 \text{ pF} \quad (25)$$

La carica totale Q sulle armature del condensatore piano alla fine del processo di carica è quindi

$$Q = C_t \Delta V_{12} \cong 11.34 \cdot 10^{-6} \text{ C} \quad (26)$$

Un volta isolato la carica rimane invariata. Sostituendo il valore di Q nella (19) e (20) si ottiene:

$$\sigma_p^- = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi a^2} \cong -4.512 \cdot 10^{-6} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (27)$$

mentre sulla superficie esterna del guscio di raggio $r = b$ si ha:

$$\sigma_p^+ = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi b^2} \cong 2.005 \cdot 10^{-6} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (28)$$

Problema 3 (11 punti) Il circuito elettrico piano mostrato in figura è formato da un filo conduttore a forma di rombo vincolato a giacere sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con centro nell'origine, come mostrato in figura 4. La diagonale maggiore misura $D = 20 \text{ cm}$ mentre quella minore $d = 15 \text{ cm}$. Il circuito è percorso da una corrente stazionaria $I = 50 \text{ A}$ e si trova immerso in un campo magnetico statico uniforme stazionario di induzione $\underline{B} = B_0[(4\hat{y} + 3\hat{z})]$. Sapendo che il flusso totale del vettore induzione magnetica attraverso il circuito è $\Phi(\underline{B}) = 22.5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ calcolare:

- (6 punti) il valore $|\underline{B}|$ dell'ampiezza *totale* del campo magnetostatico;
- (5 punti) il momento meccanico totale a cui è sottoposto il circuito.

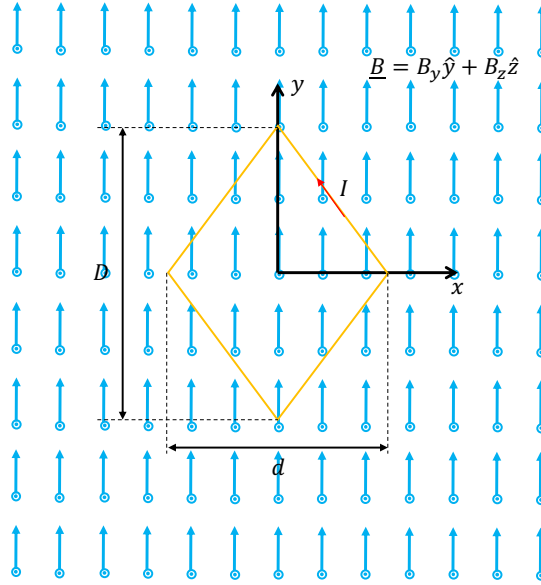


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

- Il vettore di induzione magnetica $\underline{B}$ è costante su tutta la superficie piana del circuito, la cui area totale è $S_r = (D \cdot d)/2 = 0.015 \text{ m}^2$. Il flusso dell'induzione magnetica può essere calcolato semplicemente come:

$$\Phi(\underline{B}) = \underline{B} \cdot S_r \hat{z} = 3B_0 S_r \quad (29)$$

da cui si ricava sostituendo i valori

$$B_0 = \frac{\Phi(\underline{B})}{3S_r} = 0.5 \text{ T} \quad (30)$$

Di conseguenza l'ampiezza totale del campo magnetostatico è

$$|\underline{B}| = B_0 \sqrt{4^2 + 3^2} = 5B_0 = 2.5 \text{ T} \quad (31)$$

- Il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso è $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}$ dove $\underline{m} = IS_r \hat{z}$ è il momento magnetico associato alla spira chiusa, S_r è l'area racchiusa dal circuito e $\hat{z}$ la normale al piano del circuito che vede circolare la corrente in senso antiorario. Il momento magnetico è:

$$\underline{m} = I \frac{D \cdot d}{2} \hat{z} = 0.75 \hat{z} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (32)$$

Osservando che il vettore induzione magnetica vale $\underline{B} = 2\hat{y} + 1.5\hat{z}$, il momento meccanico che agisce sulla spira è

$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B} = 0.75 \hat{z} \times (2\hat{y} + 1.5\hat{z}) = -3\hat{x} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (33)$$