

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2023-2024)

3 Settembre 2024

$$\left(\varepsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \right)$$

Problema 1 (11 punti) Nel vuoto, all'interno di un volume sferico di raggio $R_1 = 2 \text{ cm}$, è distribuita una densità di carica volumetrica $\rho_v = \gamma/r'$ essendo $r' \in [0, R_1]$ la distanza radiale dal centro e $\gamma = Q/(\pi R_1^2) \text{ C/m}^2$ una costante. Esternamente alla distribuzione sferica è presente un guscio sferico conduttore concentrico ad essa carico con una quantità di carica $Q = 9.46 \cdot 10^{-12} \text{ C}$, con raggio interno $R_2 = 2R_1$ e raggio esterno $R_3 = 3R_1$. Si determini:

- il valore del potenziale elettrostatico al centro del sistema (8 punti);
- il valore della densità superficiale totale di carica elettrica sulla superficie esterna ($r = R_3$) del guscio conduttore (3 punti).

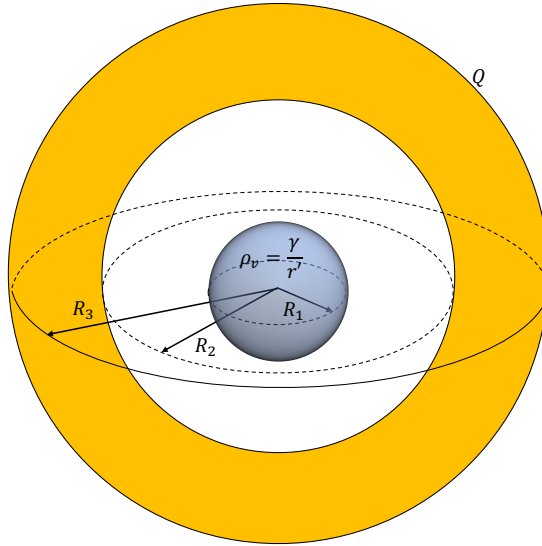


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

- a) Poiché le sorgenti (cariche) del campo elettrostatico sono tutte localizzate al finito, si può assumere che il potenziale elettrostatico all'infinito sia nullo $V(\infty) = 0$. Il potenziale elettrostatico $V(0)$ al centro della sfera equivale quindi al lavoro che si compie, contro le forze del campo, per spostare una carica positiva unitaria da un punto all'infinito fino al centro del sistema. Data la simmetria sferica delle sorgenti il lavoro può essere calcolato integrando il lavoro elementare $-\underline{E}(r) \cdot \underline{dl}$ lungo un cammino rettilineo radiale che si estende dall'infinito fino al centro:

$$V(0) = - \int_{\infty}^0 \underline{E}(r) \cdot \underline{dl} = \int_0^{\infty} \underline{E}(r) \cdot \hat{r} dr \quad (1)$$

E' necessario determinare quindi l'espressione del campo elettrostatico nelle tre regioni di interesse (regione interna della sfera; regione tra la sfera e il guscio; regione esterna al guscio) attraversate

dal cammino. Il cammino all'interno del conduttore non porta contributo al lavoro perché il campo elettrostatico è nullo e il potenziale è costante ovunque.

Per calcolare il campo elettrostatico nelle regioni di interesse, consideriamo un sistema di riferimento sferico (r, θ, ϕ) , con origine al centro del sistema. Data la simmetria sferica si può utilizzare il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie di Gauss sferica di raggio r per le tre regioni. Poiché il sistema è nel vuoto ed essendo il campo elettrico, per simmetria sferica diretto solo radialmente in tutti i punti della superficie sferica di Gauss di raggio r , avremo

$$E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

dove $Q(r)$ è la carica totale libera contenuta all'interno della superficie di Gauss sferica.

1) $r < R_1$. La carica totale libera contenuta all'interno della superficie sferica di Gauss di raggio generico r è data da :

$$Q(r) = \iiint_V \rho_v(\underline{r}') dv' = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{(r')^2} (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' = \gamma 4\pi \int_0^r r' dr' = \gamma 4\pi \left(\frac{r^2}{2} \right) = 2\pi\gamma r^2 \quad \text{C} \quad (3)$$

Sostituendo nella (2) si ottiene

$$E_r(r) = \frac{2\pi\gamma r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\gamma}{2\varepsilon_0} \quad (4)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_1(r) = \frac{\gamma}{2\varepsilon_0} \hat{r} = k_e \frac{2Q}{R_1^2} \hat{r} \cong 425.12 \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (5)$$

dove si è indicato con k_e la costante $k_e = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.

2) $R_1 < r < R_2$. La carica totale presente all'interno della superficie di Gauss di raggio r , è tutta quella dovuta alla distribuzione volumetrica di raggio R_1 ed è data da

$$Q(r)|_{r=R_1} = 2\pi\gamma R_1^2 = 2Q \quad \text{C} \quad (6)$$

Sostituendo nella (2) si ottiene

$$E_r(r) = \frac{2\pi\gamma R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \frac{2Q}{r^2} \quad (7)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_2(r) = k_e \frac{2Q}{r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (8)$$

3) $r > R_2$. La carica presente all'interno della superficie di Gauss data dalla distribuzione di densità volumetrica è la stessa del punto 2) a cui si aggiunge la carica del conduttore per cui $Q(r) = 3Q$. Si ottiene quindi

$$E_r(r) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (9)$$

Essendo la componente radiale l'unica presente, l'espressione vettoriale del campo elettrostatico è:

$$\underline{E}_3(r) = k_e \frac{3Q}{r^2} \hat{r} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (10)$$

Sostituendo le tre espressioni nella (1)

$$V(0) = \int_0^{\infty} \underline{E}(r) \cdot \hat{r} dr = \int_0^{R_1} k_e \frac{2Q}{R_1^2} dr + \int_{R_1}^{2R_1} k_e \frac{2Q}{r^2} dr + \int_{3R_1}^{\infty} k_e \frac{3Q}{r^2} dr \quad (11)$$

$$= k_e \frac{2Q}{R_1} + k_e 2Q \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{2R_1} + k_e 3Q \left[-\frac{1}{r} \right]_{3R_1}^{\infty} \quad (12)$$

$$= k_e \frac{2Q}{R_1} + k_e 2Q \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_1} \right] + k_e 3Q \left[\frac{1}{3R_1} \right] \quad (13)$$

$$= k_e \frac{2Q}{R_1} + k_e \frac{Q}{R_1} + k_e \frac{Q}{R_1} = k_e \frac{4Q}{R_1} \cong 17 \text{ V} \quad (14)$$

$$(15)$$

- b) Per induzione elettrica, data la presenza della distribuzione sferica interna con carica totale $2Q$, sulla superficie interna del guscio conduttore si induce una carica $-2Q$ mentre sulla superficie esterna si induce una carica $+2Q$. La carica totale Q_t che si distribuisce uniformemente sulla superficie esterna del conduttore è data quindi dalla somma della carica nativa Q a cui si aggiunge la carica indotta $+2Q$ per cui $Q_t = 3Q$. Data la distribuzione uniforme conseguente alla simmetria sferica, la densità totale di carica superficiale sulla superficie esterna è

$$\sigma(R_3) = \frac{3Q}{4\pi(3R_1)^2} = \frac{Q}{12\pi R_1^2} \cong 6.27 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (16)$$

Problema 2 (11 punti) Un conduttore ha la forma di un parallelepipedo a sezione quadrata di lato $l = 3 \text{ cm}$ e lunghezza totale $H = 10 \text{ cm}$. Il conduttore è costituito per una lunghezza x da un materiale conduttore di conducibilità $\sigma_1 = 0.1 (\Omega \cdot m)^{-1}$ e per la rimanente parte $(H - x)$ da un materiale conduttore di conducibilità $\sigma_2 = 0.511 (\Omega \cdot m)^{-1}$ (vedi figura 2). Le due estremità del conduttore sono collegate ad un generatore di forza elettromotrice costante $\Delta V_0 = 20 \text{ V}$ mentre il conduttore di altezza x è collegato ad un condensatore ideale ad armature piane circolari di raggio $a = 51.93 \text{ mm}$ e distanza $d = 6 \text{ mm}$. Lo spazio tra le armature del condensatore è riempito per metà da materiale dielettrico omogeneo, isotropo, lineare di permittività $\epsilon_r = 4$. Sapendo che all'equilibrio finale (a regime) la carica totale del condensatore è $Q = 10^{-10} \text{ C}$ determinare il valore della lunghezza delle due parti di conduttore x e $(H - x)$.

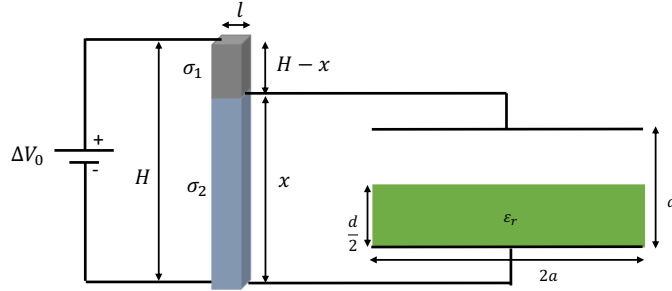


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

Per prima cosa calcoliamo la differenza di potenziale finale ΔV_c che si stabilisce ai capi del condensatore. La capacità del condensatore è equivalente alla capacità totale di due condensatori C_a e C_d connessi in serie. I valori delle singole capacità sono:

$$C_a = \frac{2\epsilon_0\pi a^2}{d} \cong 25.00 \text{ pF} \quad (17)$$

$$C_d = \frac{2\epsilon_0\epsilon_r\pi a^2}{d} \cong 100.01 \text{ pF} \quad (18)$$

La capacità totale è quindi:

$$C_s = \frac{C_a C_d}{C_a + C_d} \cong 20 \text{ pF} \quad (19)$$

La differenza di potenziale finale ΔV_c è quindi

$$\Delta V_c = \frac{Q}{C_s} \cong 5 \text{ V} \quad (20)$$

Il circuito formato dal generatore e dal conduttore a forma di parallelepipedo è equivalente al circuito di figura 3, dove

$$R_1 = \frac{\rho_1(H-x)}{S} \Omega \quad (21)$$

$$R_2 = \frac{\rho_2 x}{S} \Omega \quad (22)$$

e in cui $S = l^2$ e $\rho_{1,2} = 1/\sigma_{1,2}$. Poiché la corrente I che scorre a regime nelle due parti del conduttore è la stessa, questa può essere calcolata come

$$I = \frac{\Delta V_0}{(R_1 + R_2)} \quad (23)$$

A regime si ha quindi che la caduta di potenziale ai capi del tratto di lunghezza x è :

$$\Delta V_c = R_1 I = \frac{R_2 \Delta V_0}{R_1 + R_2} \quad (24)$$

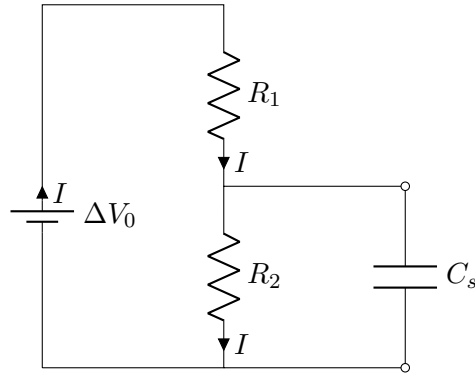


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

Sostituendo la (21) e la (22) si ottiene

$$\Delta V_c = \frac{\rho_2 x \Delta V_0}{[\rho_1(H - x) + \rho_2 x]} \quad (25)$$

Dopo semplici operazioni si ricava

$$x = \frac{\Delta V_c \rho_1 H}{\Delta V_c (\rho_1 - \rho_2) + \Delta V \rho_2} \cong 6.3 \text{ cm} \quad (26)$$

da cui $H - x = 3.7 \text{ cm}$

Problema 3 (11 punti) Un filo rettilineo infinito, coincidente con l'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, è percorso da corrente stazionaria $I_1 = 100 \hat{y} \text{ A}$. Un circuito chiuso, complanare con il filo indefinito, è composto da due raggi rettilinei PQ e PM di lunghezza $R = \pi \text{ cm}$ disposti a $\alpha = 90$ gradi, simmetricamente rispetto all'asse x del sistema di riferimento e da un tratto di semicirconferenza QM con centro P e raggio R (vedi figura 4). Il circuito è posizionato con il centro P ad una distanza a dal filo indefinito ed è percorso in senso antiorario da una corrente stazionaria $I_2 = I_1$. Determinare il valore della distanza a in modo tale che il campo di induzione magnetica totale in P sia nullo.

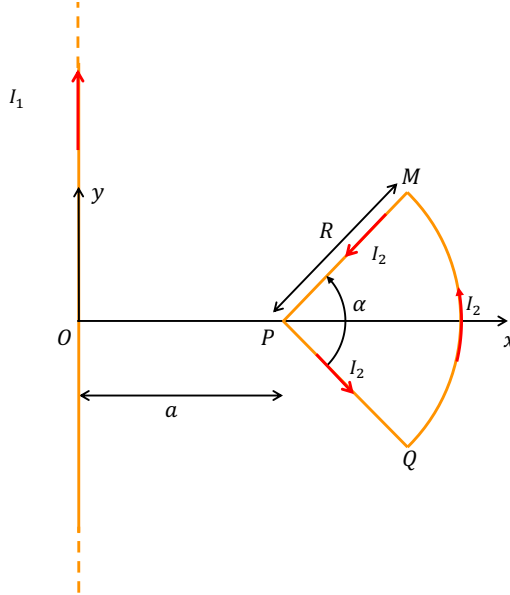


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

L'asse $\hat{z}$ del sistema di riferimento cartesiano è uscente nel foglio. Il vettore induzione magnetica generato dal filo rettilineo percorso da corrente I_1 nel punto $P = (a, 0)$ a distanza a dall'asse $\hat{y}$ è:

$$\underline{B}_1(a, 0) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{a} \hat{z}. \quad (27)$$

Il vettore induzione magnetica generato nello stesso punto $P = (a, 0)$ dalla spira PQM può essere calcolato seguendo la procedura mostrata nella soluzione al problema 3 della prova scritta del 23 Febbraio 2024. Si ottiene facilmente che:

$$\underline{B}_2(a, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2}{R}(\alpha) \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2}{R} \frac{\pi}{2} \hat{z} = \frac{\mu_0}{8} \frac{I_2}{R} \hat{z} \quad (28)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il vettore induzione magnetica totale $\underline{B}_t(a, 0)$ è dato dalla somma *vettoriale* dei due contributi calcolati:

$$\underline{B}_t(a, 0) = \underline{B}_1(a, 0) + \underline{B}_2(a, 0) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{a} \hat{z} + \frac{\mu_0}{8} \frac{I_2}{R} \hat{z} \quad (29)$$

Imponendo l'annullamento del campo totale ($\underline{B}_t(a, 0) = 0$)

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{a} = \frac{\mu_0}{8} \frac{I_2}{R} \quad (30)$$

e sostituendo $I_1 = I_2 = I = 100 \text{ A}$ e $R = \pi \text{ cm}$ si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{I}{a} = \frac{1}{8} \frac{I}{\pi} \quad (31)$$

da cui si ricava $a = 4 \text{ cm}$.