

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2023-2024)

16 Settembre 2024

$$\left(\varepsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}\right)$$

Problema 1 (11 punti) All'interno di volumi sferici di raggio R_1 ed R_2 sono distribuite due densità volumetriche di carica $\rho_1^v(r) = \gamma_1/(r_1)^2$ e $\rho_2^v(r) = \gamma_2/(r_2)^2$, rispettivamente, essendo $r_{1,2}$ la distanza radiale dal centro, $\gamma_{1,2}$ C/m^2 due costanti. Le due sfere sono parzialmente sovrapposte, poichè $R_2 = (3/4)R_1$ e il centro della sfera 2 si trova esattamente sulla superficie della sfera 1, come mostrato in figura 1. Nell'ipotesi che sia $\gamma_1 = 424.992 \cdot 10^{-12}$, $\gamma_2 = (9/4)\gamma_1$ e $R_1 = 40$ cm si determini il vettore campo elettrico totale in un punto a distanza $d = R_1/4$ dal centro della sfera 1 sulla congiungente i due centri, rispetto ad un sistema di riferimento globale scelto a piacere.

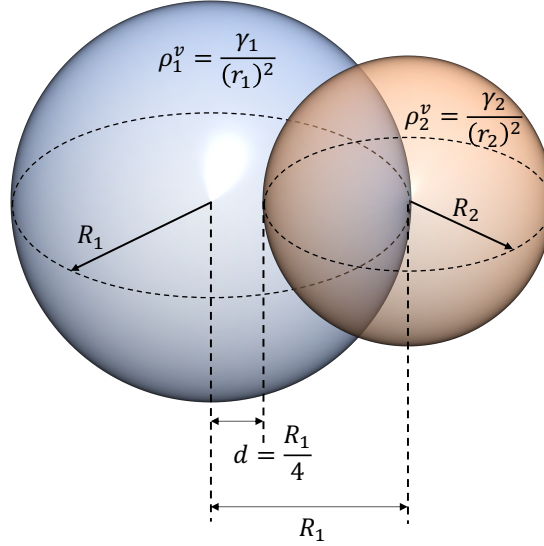


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

In virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, per calcolare il campo elettrostatico totale nel punto d si determina inizialmente il campo elettrostatico generato dalle due distribuzioni considerate singolarmente e si effettua successivamente la somma vettoriale.

1. Per la sfera 1 consideriamo un sistema di riferimento sferico locale sferico (r_1, θ_1, ϕ_1) , con origine al centro della sfera. Data la simmetria sferica si può utilizzare il teorema di Gauss applicato ad una generica superficie di Gauss sferica di raggio $d = R_1/4$. Poiché il sistema è nel vuoto ed essendo il campo elettrico, per simmetria sferica diretto solo radialmente in tutti i punti della superficie di Gauss, avremo

$$E_1^r(d) \cdot 4\pi d^2 = \frac{Q_1(d)}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

dove $Q_1(d)$ è la carica totale libera contenuta all'interno della superficie di Gauss sferica data da :

$$Q_1(d) = \iiint_{V_1} \rho_1^v(\mathbf{r}_1') dv_1' = \int_0^d \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_1}{(r_1')^2} (r_1')^2 \sin \theta_1' dr_1' d\theta_1' d\phi_1' = \gamma_1 4\pi \int_0^{R_1/4} dr_1' = \pi \gamma_1 R_1 \quad C \quad (2)$$

Sostituendo nella (5) si ottiene

$$E_1^r\left(\frac{R_1}{4}\right) = \frac{4\pi\gamma_1\left(\frac{R_1}{4}\right)}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{R_1}{4}\right)^2} = \frac{4\gamma_1}{\epsilon_0 R_1} \frac{V}{m} \quad (3)$$

da cui:

$$\underline{E}_1\left(\frac{R_1}{4}\right) = \frac{4\gamma_1}{\epsilon_0 R_1} \hat{r}_1 = 480\hat{r}_1 \frac{V}{m} \quad (4)$$

2. Per la sfera 2 consideriamo un sistema di riferimento sferico locale (r_2, θ_2, ϕ_2) , con origine al centro della sfera. Analogamente al caso precedente, il campo elettrico radiale in tutti i punti della superficie sferica di Gauss di raggio R_2 è

$$E_2^r(R_2) \cdot 4\pi R_2^2 = \frac{Q_2(R_2)}{\epsilon_0} \quad (5)$$

dove $Q_2(R_2)$ è la carica totale libera contenuta all'interno della superficie di Gauss sferica data da :

$$Q_2(R_2) = \iiint_{V_2} \rho_2^v(r'_2) dv'_2 = \int_0^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_2}{(r'_2)^2} (r'_2)^2 \sin \theta'_2 dr'_2 d\theta'_2 d\phi'_2 = \gamma_2 4\pi \int_0^{R_2} dr'_2 = 4\pi\gamma_2 R_2 \quad C \quad (6)$$

Sostituendo nella (5) si ottiene

$$E_2^r(R_2) = \frac{4\pi\gamma_2 R_2}{4\pi\epsilon_0 (R_2)^2} = \frac{\gamma_2}{\epsilon_0 R_2} \frac{V}{m} \quad (7)$$

da cui:

$$\underline{E}_2(R_2) = \frac{\gamma_2}{\epsilon_0 R_2} \hat{r}_2 = 360\hat{r}_2 \frac{V}{m} \quad (8)$$

Consideriamo come sistema di riferimento globale quello centrato nella sfera 1. Nel punto d avremo $\hat{r}_2 = -\hat{r}_1$ ed sapendo che $R_2 = (3/4)R_1$, il campo elettrostatico $\underline{E}_2(d)$ espresso rispetto al sistema di riferimento 1 è

$$\underline{E}_2(d) = -\frac{4\gamma_2}{\epsilon_0 3R_1} \hat{r}_1 \frac{V}{m} \quad (9)$$

A questo punto è possibile sommare vettorialmente i due campi elettrici per trovare l'espressione totale del campo elettrostatico in d :

$$\underline{E}_t(d) = \underline{E}_1(d) + \underline{E}_2(d) = \frac{4\gamma_1}{\epsilon_0 R_1} \hat{r}_1 - \frac{4\gamma_2}{\epsilon_0 3R_1} \hat{r}_1 = \frac{4}{\epsilon_0 R_1} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_2}{3} \right) \hat{r}_1 = \frac{\gamma_1}{\epsilon_0 R_1} \hat{r}_1 = 120\hat{r}_1 \frac{V}{m} \quad (10)$$

Problema 2 (11 punti) Un condensatore piano, ideale, le cui armature metalliche sono circolari di raggio $a = 10 \text{ cm}$ e distanti $d = 4.768 \text{ mm}$, è totalmente riempito con due materiali dielettrici. Il primo materiale, di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r1} = 3$, occupa la metà del volume mentre il secondo, di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r2} = 9$, occupa l'altra metà. Sapendo che la carica libera totale sulle armature è $Q = 3.15 \text{ nC}$. Determinare:

- la capacità totale del condensatore (6 punti);
- le densità superficiali positive di carica libera che si localizzano sulle parti delle armature affacciate ai due dielettrici (5 punti);

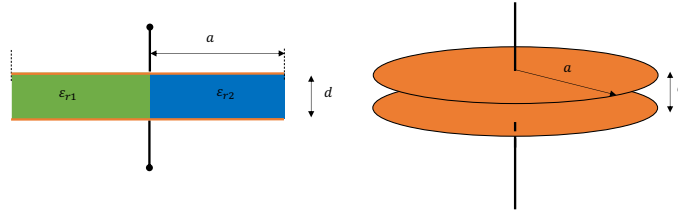


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

- Il condensatore può essere rappresentato come il parallelo di due condensatori piani di capacità rispettivamente (figura 3):

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} (\pi a^2)}{2d} \cong 87.50 \text{ pF} \quad (11)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} (\pi a^2)}{2d} \cong 262.52 \text{ pF} \quad (12)$$

La capacità totale di due condensatori in parallelo è la somma delle capacità per cui

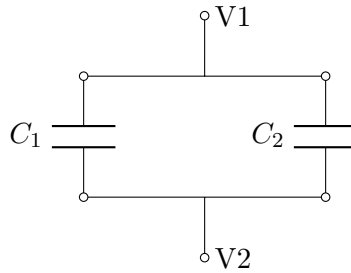


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

$$C_{tot} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \pi a^2}{2d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} \pi a^2}{2d} \quad (13)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{2d} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \cong 350.02 \text{ pF} \quad (14)$$

- La differenza di potenziale ai capi del condensatore è

$$\Delta V = \frac{Q}{C_t} = \frac{Q 2d}{\epsilon_0 \pi a^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \cong 9 \text{ V} \quad (15)$$

Le cariche che si localizzano sulle armature dei due condensatori in parallelo sono quindi

$$Q_1 = C_1 \Delta V = \frac{Q \varepsilon_{r1}}{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \cong 0.79 \text{ nC} \quad (16)$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V = \frac{Q \varepsilon_{r2}}{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})} \cong 2.36 \text{ nC} \quad (17)$$

e quindi svolgendo i conti:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)} \cong 50.13 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2 \quad (18)$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)} \cong 150.4 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2 \quad (19)$$

Problema 3 (11 punti) Un circuito chiuso è formato da una spira a rettangolare di lati $a = 0.2$ m e $b = 0.8333$ m. La spira di filo conduttore presenta globalmente una resistenza totale di $R = 30 \Omega$ e si trova immerso in un campo di induzione magnetica di ampiezza che cresce linearmente in distanza ed esponenzialmente nel tempo $\underline{B}(x, y, t) = B_z x e^{\alpha t} \hat{z}$ (vedi figura 4). Nell'ipotesi che sia $B_z = 0.5 \text{ T} \cdot \text{m}^{-3}$, e $\alpha = 1.96 \text{ (sec)}^{-1}$, calcolare l'energia totale dissipata nella spira nell'intervallo di tempo $0 < t < 2$ sec.

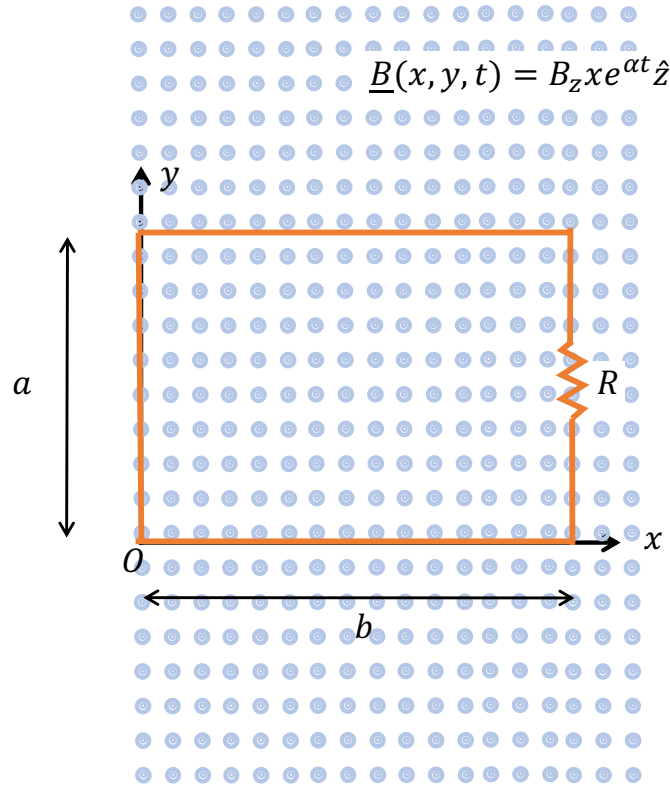


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione al problema 3

Dal tempo $t = 0$ fino al tempo $t_1 = 2$ sec il campo di induzione magnetica aumenta la propria intensità esponenzialmente con il tempo. Si registra dunque un aumento del flusso del campo concatenato con la spira, e di conseguenza si produrrà, secondo la legge di Faraday, Neumann e Lenz, una f.e.m. indotta $\mathcal{E}_i(t)$ che, essendo il circuito costituito da filo conduttore, farà circolare una corrente indotta $I_i(t)$. Poichè il campo $\underline{B}(x, y, t)$ non è uniforme sulla superficie della spira, il flusso all'istante t è dato da:

$$\Phi[\underline{B}, t] = \iint_S \underline{B}(x, y, t) \cdot \hat{n} ds = \int_0^a \int_0^b B_z x e^{\alpha t} \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy \quad (20)$$

$$= \int_0^a \int_0^b B_z x e^{\alpha t} dx dy = B_z a \frac{b^2}{2} e^{\alpha t} \quad \text{Wb} \quad (21)$$

Il modulo della f.e.m. indotta è dunque

$$\mathcal{E}_i(t) = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_z a \frac{b^2}{2} \alpha e^{\alpha t} \quad \text{V} \quad (22)$$

La corrente indotta nel solenoide circola in senso *orario* e la sua ampiezza è data da

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}_i(t)}{R} = \frac{B_z a b^2 \alpha e^{\alpha t}}{2R} \quad \text{A} \quad (23)$$

La potenza istantanea dissipata sulla resistenza è data da:

$$P(t) = \frac{(\mathcal{E}_i)^2}{R} = \frac{(B_z a \frac{b^2}{2} \alpha)^2 e^{2\alpha t}}{R} = \frac{B_z^2 a^2 b^4 \alpha^2 e^{2\alpha t}}{4R} \quad \text{W} \quad (24)$$

La potenza dissipata non è costante nel tempo quindi durante l'intervallo di tempo $t \in [0, t_1]$ sec. l'energia elettrica totale W dissipata per effetto Joule risulta

$$W = \int_0^{t_1} P(t) dt = \frac{B_z^2 a^2 b^4 \alpha^2}{4R} \int_0^{t_1} e^{2\alpha t} dt = \frac{B_z^2 a^2 b^4 \alpha^2}{4R} \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha t} \Big|_0^{t_1} = \frac{B_z^2 a^2 b^4 \alpha}{8R} (e^{2\alpha t_1} - 1) \cong 0.1 \quad \text{J} \quad (25)$$