

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

15 Giugno 2021.

Problema 1 (8 punti) Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 8.98 \text{ mm}$ è carica con una quantità di carica $Q = 10^{-6} \text{ C}$. Successivamente, un guscio sferico di materiale conduttore di raggio interno $R_2 = 3 \cdot R_1$ e raggio esterno $R_3 = 2 \cdot R_2$, inizialmente scarico, viene posizionato attorno alla sfera in modo che il guscio sia concentrico alla sfera stessa. Determinare:

- i valori iniziali del potenziale della sfera e della energia elettrostatica del sistema in assenza del guscio sferico.
- i valori finali del potenziale della sfera e della energia elettrostatica del sistema una volta posizionato il guscio sferico.

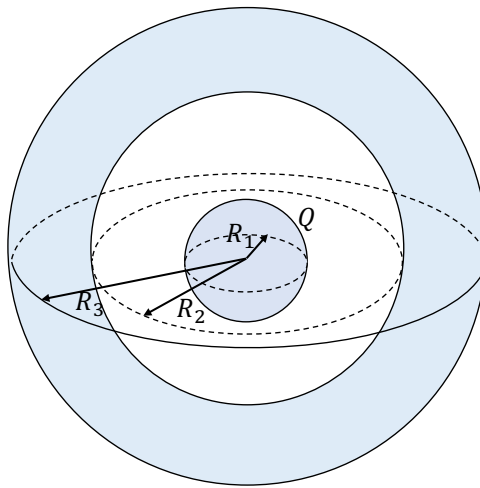


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)

Il potenziale della sfera è equivalente a quello di una carica puntiforme di valore Q posta al centro della sfera stessa. Indicata con r la distanza dal centro della sfera si ha per $r > R_1$:

$$V_a(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1)$$

Quindi il potenziale della sfera risulta:

$$V_a(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1} = 1 \cdot 10^6 \text{ V} \quad (2)$$

La capacità della sfera C_a può essere calcolata ricordando che per un singolo conduttore isolato $Q = CV$, da cui

$$C_a = 4\pi\epsilon_0 R_1 = 1 \text{ pF} \quad (3)$$

L'energia potenziale immagazzinata in questa configurazione può essere agevolmente determinata ricordando che l'energia elettrostatica immagazzinata da un sistema di N conduttori è:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (4)$$

dove con q_i e V_i abbiamo indicato rispettivamente la carica e il potenziale del conduttore i -esimo. Nel nostro caso, essendo in presenza di un solo conduttore carico, che si trova a potenziale $V_a(R_1)$, si ha :

$$U_a = \frac{1}{2} Q V_a(R_1) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R_1} \cong 0.5 J \quad (5)$$

b)

Una volta posizionato il guscio conduttore scarico, per induzione completa sulla superficie interna del guscio (di raggio R_2) si localizza una carica $-Q$ distribuita uniformemente e sulla superficie esterna del guscio (di raggio R_3) si localizza una carica totale $+Q$, sempre distribuita uniformemente. Il guscio rimane globalmente scarico. Il campo elettrostatico esterno al guscio e nella cavità può essere calcolato agevolmente ricorrendo al Teorema di Gauss e si ottiene in entrambi i casi:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \begin{cases} R_1 < r < R_2 \\ r > R_2 \end{cases} \quad (6)$$

dove r rappresenta la distanza radiale dal centro della sfera.

All'interno del guscio conduttore il campo elettrostatico è nullo.

Per calcolare il potenziale della sfera è sufficiente integrare il campo elettrostatico lungo un cammino radiale che va da un punto A posizionato sulla superficie interna del guscio ad un punto B posizionato sulla sfera.

$$V_B - V_A = - \int_A^B \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = V_b(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr \quad (7)$$

dove con $V_b(R_1)$ si è indicato il potenziale a cui si trova la sfera e con $V(R_2)$ il potenziale a cui si trova il guscio conduttore.

Poiché il guscio conduttore è una regione equipotenziale, il suo potenziale può essere calcolato integrando lungo un cammino radiale rettilineo dalla che si estende dall'infinito alla superficie esterna del guscio:

$$V(R_2) = V(R_3) = \int_{R_3}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_3}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \cong 0.166 \cdot 10^6 V \quad (8)$$

Il potenziale della sfera risulta quindi:

$$V_b(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr + V(R_2) \quad (9)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} + V(R_2) \quad (10)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] \quad (11)$$

$$\cong 0.844 \cdot 10^6 V \quad (12)$$

L'energia elettrostatica immagazzinata nella nuova configurazione può essere determinata ancora ricorrendo alla espressione (4). Tenendo presente che il guscio sferico è complessivamente scarico:

$$U_b = \frac{1}{2} Q V_b(R_1) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] \cong 0.417 J \quad (13)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore cilindrico, ideale, in aria, a sezione circolare e di lunghezza L è costituito da un'armatura cilindrica esterna di raggio c coassiale ad un'armatura interna cilindrica di raggio a . Il condensatore viene caricato fino a raggiungere una differenza di potenziale tra le due armature di $\Delta V_0 = V_1 - V_2$ [V], e quindi isolato. Successivamente all'interno del condensatore viene introdotta una struttura formata da un guscio di materiale dielettrico, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r , raggio interno b e raggio esterno c e da una lamina di conduttore cilindrico, scarica, di spessore infinitesimo, e di raggio raggio interno b , che si trova a contatto con la superficie interna del guscio dielettrico (vedi figura 2).

- Determinare l'espressione del rapporto $\Delta V_N / \Delta V_0$ tra la differenza di potenziale ΔV_N tra le armature del condensatore dopo l'introduzione della struttura, e la differenza di potenziale iniziale ΔV_0 .
- Nell'ipotesi che $\epsilon_r = 4$, $a = 2 \text{ mm}$, $b = 2a$ e $c = 3a$ e che il dielettrico non possa sopportare un campo elettrico interno superiore a $E_{g1} = 10^7 \text{ V/m}$ calcolare il massimo valore di tensione ΔV_0 applicabile al condensatore nella fase iniziale affinché dopo l'introduzione del dielettrico questo non si danneggi.

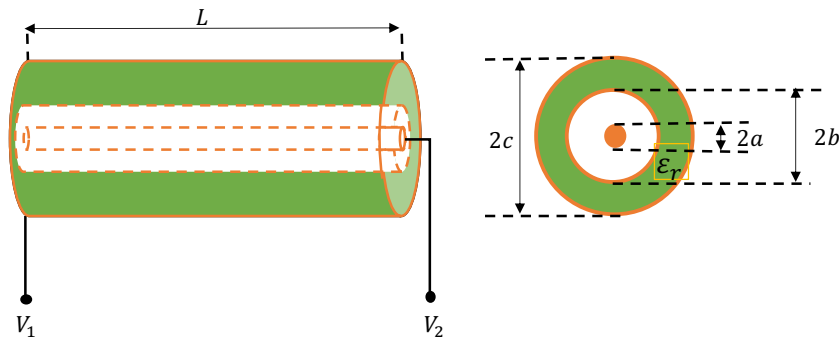


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

La capacità del condensatore cilindrico in aria è:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} \quad (14)$$

La carica iniziale Q sulle armature del condensatore piano può essere calcolata ricordando che $Q = C\Delta V$ per cui

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} \Delta V_0 \quad (15)$$

Un volta introdotta la struttura la carica rimane invariata perché il condensatore viene isolato. La nuova differenza di potenziale che si stabilisce tra le armature dipende dalla capacità del condensatore dopo l'introduzione della struttura. In questo caso il condensatore può essere visto come la serie di due condensatori cilindrici (vedi figura 3). Le capacità dei singoli condensatori sono

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \quad (16)$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (17)$$

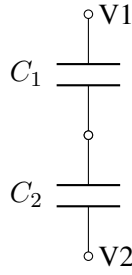


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

La capacità totale di due condensatori in serie è il parallelo delle due capacità per cui si ha:

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\epsilon_r \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \quad (18)$$

La differenza di potenziale ΔV_N nella nuova configurazione è

$$\Delta V_N = \frac{Q}{C_T} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} \Delta V_0 \cdot \frac{\epsilon_r \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \quad (19)$$

$$= \Delta V_0 \cdot \frac{\epsilon_r \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{\epsilon_r \ln\left(\frac{c}{a}\right)} \quad (20)$$

quindi:

$$\frac{\Delta V_N}{\Delta V_0} = \frac{\epsilon_r \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{\epsilon_r \ln\left(\frac{c}{a}\right)} \quad (21)$$

b)

Il campo elettrico in un qualsiasi punto all'interno del dielettrico può essere calcolato applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio r_c con $b < r_c < c$. Poiché l'induzione elettrica $\underline{D}(r)$ risulta costante su tutta la superficie di Gauss e normale a questa si ha:

$$\underline{D} \cdot 2\pi r_c L = Q \quad (22)$$

da cui

$$\underline{D}(r_c) = \frac{Q}{2\pi L r_c} \hat{r}_c \quad (23)$$

Poiché il materiale è omogeneo e isotropo, all'interno del dielettrico risulta $\underline{D}(r_c) = \epsilon_0\epsilon_r \underline{E}(r_c)$ da cui, utilizzando la (15):

$$\underline{E}(r_c) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L r_c} \hat{r}_c = \frac{\Delta V_0}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) \epsilon_r r_c} \hat{r}_c \quad (24)$$

Il massimo valore viene assunto per $r_c = b$ e questo valore non dovrà essere maggiore di $E_{g1} = 10^7 \text{ V/m}$, cioè $|\underline{E}(b)| \leq E_{g1}$ per cui

$$\frac{\Delta V_0}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) \epsilon_r b} \leq E_{g1} \quad (25)$$

da cui

$$\Delta V_0 \leq E_{g1} \ln\left(\frac{c}{a}\right) \epsilon_r b = 10^7 \ln(3) \cdot 4 \cdot 0.004 \cong 1.75 \cdot 10^5 \text{ V} \quad (26)$$

Problema 3 (8 punti) Un circuito percorso da corrente stazionaria I è costituito da due tratti rettilinei paralleli all'asse y che si estendono all'infinito e da una tratto a forma di semicirconferenza con centro l'origine, e raggio a come mostrato in figura 4. Determinare:

- l'espressione del vettore induzione magnetica nell'origine del sistema di riferimento dovuto ai soli contributi rettilinei semiinfiniti ;
- l'espressione del vettore induzione magnetica totale nell'origine del sistema di riferimento aggiungendo ai due contributi rettilinei anche il contributo dovuto al tratto semicircolare.

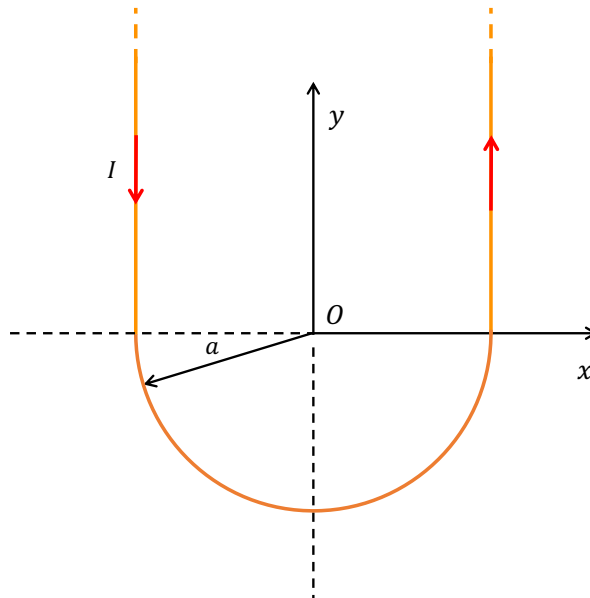


Figura 4: Geometria del problema 3

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$$

Soluzione del problema 3

a)

Il vettore induzione magnetica generato nell'origine del sistema di riferimento può esser calcolato utilizzando la prima formula di Laplace:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (27)$$

Indichiamo con 1 e 2 i due tratti rettilinei e con 3 il tratto curvilineo. Con riferimento alla figura 5 consideriamo il contributo elementare del campo di induzione magnetica nell'origine dovuto ad un elementino di corrente ad altezza y' sul tratto 1.

$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m})$ Essendo $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{r}' = a\hat{x} + y'\hat{y}$ il contributo elementare è

$$dB_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dy' \hat{y} \times (-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|^3} \quad (28)$$

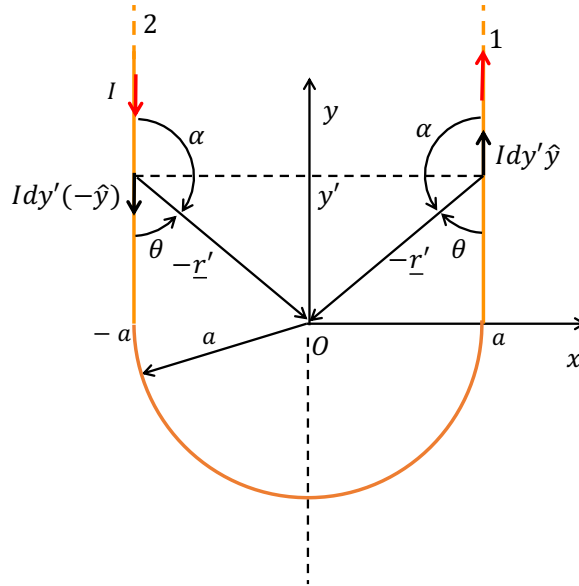


Figura 5: Geometria per il calcolo dei tratti rettilinei

Introducendo la variabile angolare α , angolo tra $\hat{y}$ e $(-\underline{r}')$, si ha:

$$\hat{y} \times (-\underline{r}') = a\hat{z} \quad (29)$$

$$\sin \theta = \sin \pi - \alpha = \sin \alpha \quad (30)$$

$$|(-\underline{r}')| = \frac{a}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (31)$$

$$y' = \frac{a}{\tan \theta} = -\frac{a}{\tan \alpha} \quad (32)$$

$$dy' = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \quad (33)$$

$$(34)$$

Sostituendo:

$$d\underline{B}_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right) \frac{a\hat{z} \sin^3 \alpha}{a^3} \quad (35)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \sin \alpha d\alpha \hat{z} \quad (36)$$

$$(37)$$

Integrando da $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ad $\alpha = \pi$ si ottiene

$$\underline{B}_1(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \alpha d\alpha \hat{z} \quad (38)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} [-\cos \alpha]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \hat{z} \quad (39)$$

Alternativamente, si può evidenziare che il problema presenta una simmetria rispetto all'asse x per cui il campo di induzione (39) è equivalente alla metà del campo di un filo infinito.

Applicando lo stesso procedimento al tratto 2 si ottiene lo stesso contributo diretto nello stesso senso, uscente dal foglio.

$$\underline{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \hat{z} \quad (40)$$

Sommando i due contributi si ottiene:

$$\underline{B}_a(0,0) = \underline{B}_1(0,0) + \underline{B}_2(0,0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \hat{z} \quad (41)$$

b)

Per quanto riguarda il tratto semicircolare 3, con riferimento alla figura 6 consideriamo un elementino di corrente $I d\vec{l}$, posizionato in ϕ' . La sua distanza dal centro è sempre la stessa e pari ad a e si ha:

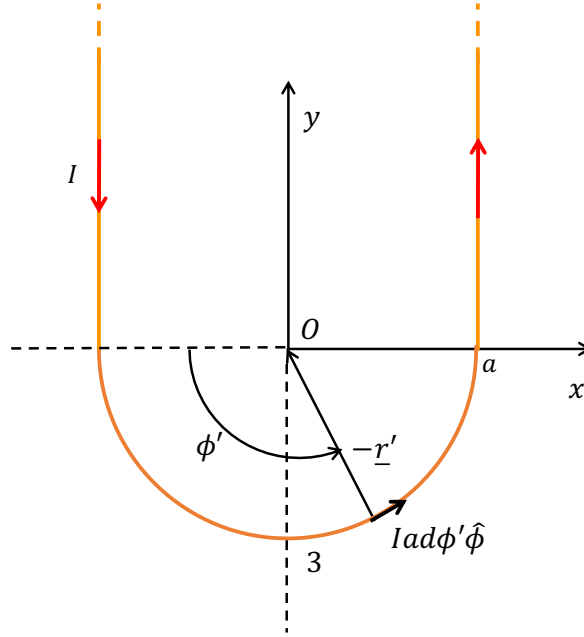


Figura 6: Geometria per il calcolo dei tratti rettilinei

$$d\vec{l} = a d\phi' \hat{\phi}' \quad (42)$$

$$d\vec{l} \times (-\vec{r}') = a d\phi' \hat{\phi}' \times (-\vec{r}') = a^2 \hat{z} \quad (43)$$

$$(44)$$

Sostituendo nella prima formula di Laplace:

$$d\vec{B}_3(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a^2}{a^3} d\phi' \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} d\phi' \hat{z} \quad (45)$$

Integrando tra gli estremi $0 \leq \phi' \leq \pi$ si ottiene che il contributo del tratto semicircolare è

$$\vec{B}_3(0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int_0^\pi d\phi' \hat{z} = \frac{\mu_0}{4} \frac{I}{a} \hat{z} \quad (46)$$

Alternativamente, anche in questo caso, data la simmetria circolare del problema, il campo di induzione magnetica (46), è equivalente alla metà del campo totale dovuto ad una spira circolare.

Sommando questo contributo al precedente:

$$\vec{B}_t(0,0) = \vec{B}_a(0,0) + \vec{B}_3(0,0) = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} + \frac{\mu_0}{4} \frac{I}{a} \right] \hat{z} \quad (47)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} [2 + \pi] \hat{z} \quad (48)$$

Problema 4 (8 punti) Una sbarra conduttrice rigida si appoggia su due binari conduttori rettilinei disposti a 30° l'uno dall'altro come mostrato in figura 7. La sbarra, partendo dal punto di incrocio dei due binari, viene fatta muovere con velocità costante $\underline{v}_0 = v_0 \hat{x}$ rimanendo sempre perpendicolare al binario disposto lungo l'asse x . Tutto il sistema è immerso in un campo di magnetostatico uniforme di induzione magnetica $\underline{B} = 0.5774 \hat{z} \text{ T}$ uscente dal foglio. Determinare:

- la velocità v_0 della sbarra se l'ampiezza della forza elettromotrice indotta quando la sbarra si trova nella posizione $x_1 = 0.6 \text{ m}$ dall'incrocio tra i due binari è $|\mathcal{E}_i| = 0.2 \text{ V}$.
- la forza magnetica che agisce sulla sbarra quando è nella posizione x_1 sapendo che sia i binari che la sbarra sono costituiti da conduttori cilindrici di raggio $a = 1 \text{ mm}$ e conducibilità $\sigma = 5 \cdot 10^4 [\Omega \cdot \text{m}]^{-1}$.

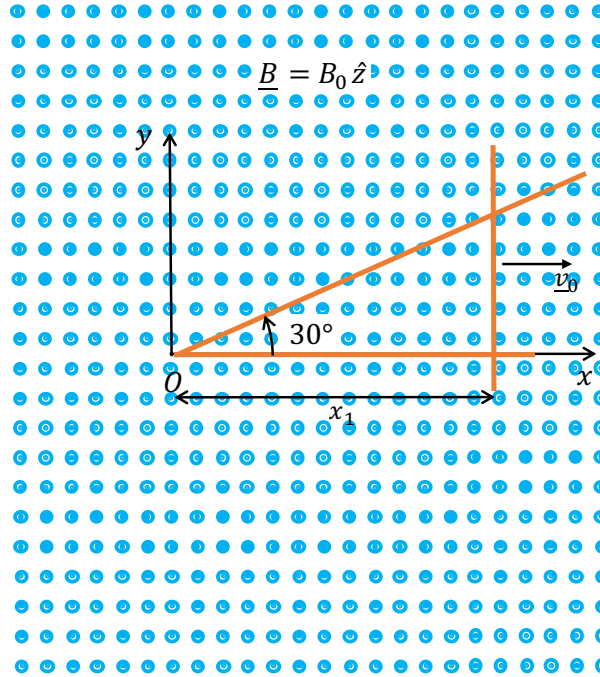


Figura 7: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 4

a)

La posizione della sbarra $x(t)$ rispetto all'asse x durante il moto è data dalla legge

$$x(t) = v_0 \cdot t \quad (49)$$

All'istante generico t l'altezza della sbarra tra i due binari è

$$h(t) = x(t) \tan 30^\circ = \frac{x(t)}{\sqrt{3}} \quad (50)$$

L'area all'istante generico t risulta quindi:

$$A(t) = \frac{x(t) \cdot h(t)}{2} = \frac{x^2(t)}{2\sqrt{3}} \quad (51)$$

Essendo il campo di induzione magnetica costante e perpendicolare al piano della spira, il flusso totale all'istante t è quindi:

$$\Phi(t) = \cdot A(t) = \frac{x(t) \cdot h(t)}{2} = \frac{|\underline{B}|x^2(t)}{2\sqrt{3}} = \frac{|\underline{B}|v_0^2 t^2}{2\sqrt{3}} \quad (52)$$

L'ampiezza della FEM indotta all'istante generico t è:

$$|\mathcal{E}_i| = \left| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \frac{|B|v_0^2 t}{\sqrt{3}} = \frac{|B|v_0 x(t)}{\sqrt{3}} \quad (53)$$

da cui si ricava:

$$v_0 = \frac{\sqrt{3}|\mathcal{E}_i|}{|B|x(t)} \quad (54)$$

Sostituendo i valori numerici, in corrispondenza della posizione $x(t_1) = x_1 = 0.6 \text{ m}$ si ha:

$$v_0 = \frac{\sqrt{3} \cdot 0.2}{0.5774 \cdot 0.6} = 1 \text{ m/s} \quad (55)$$

b)

Poiché il flusso sta aumentando la corrente indotta I_i nella spira dalla forza elettromotrice circolerà in senso orario. La forza magnetica che agisce sulla sbarra quando si trova nella posizione x_1 è data quindi da

$$\underline{F} = I_i h(t)(-\hat{y}) \times (B_0 \hat{z}) = I_i h(t) B_0 (-\hat{x}) \quad (56)$$

Per il calcolo della corrente indotta dobbiamo prima calcolare la resistenza totale del filo conduttore quando la sbarra si trova nella posizione x_1 . La resistività del filo è

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 2 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot m \quad (57)$$

La lunghezza totale del filo è

$$L = x_1 + \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{x_1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cong 1.64m \quad (58)$$

La resistenza totale è quindi:

$$R = \frac{\rho L}{\pi a^2} = 10.43 \Omega \quad (59)$$

Nota la resistenza totale e la forza elettromotrice indotta posso calcolare la corrente indotta come:

$$I_i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} \cong 0.0192 \text{ A} \quad (60)$$

Infine la forza magnetica che agisce sulla sbarra è

$$\underline{F} = I_i h(t_1) B_0 (-\hat{x}) = 0.0192 \cdot \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cdot 0.5774 (-\hat{x}) \cong 0.0038 (-\hat{x}) \text{ N} \quad (61)$$