

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

28 Giugno 2021.

Problema 1 (8 punti) Una sfera conduttrice di raggio R_1 , su cui è presente la carica Q , ha il centro posto nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. La sfera è avvolta da un guscio sferico concentrico ad essa, con raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 2R_1$, nel cui volume è distribuita la densità di carica ρ_v [C/m^3]. Si determini:

- l'espressione del campo elettrico in un punto a distanza $3R_1$ dall'origine del sistema di riferimento;
- il valore della carica Q nell'ipotesi che $R_1 = 2\text{ cm}$, $\rho_v = 42.65 \cdot 10^{-6}\text{ C/m}^3$, e che il potenziale $V(R)$ a distanza $R = 4R_1$ dal centro del sistema sia $V(R) = 1.2363 \cdot 10^3\text{ V}$.

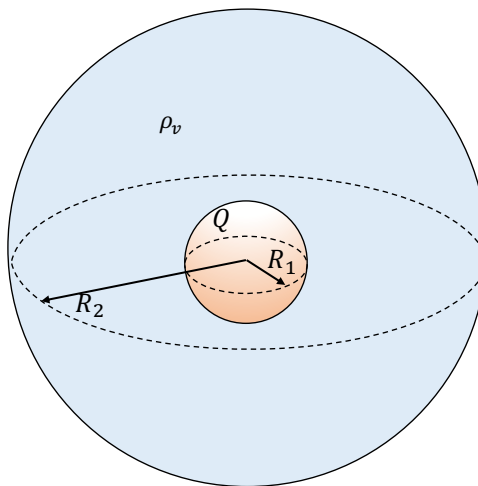


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione al problema 1

a)

Consideriamo una superficie di Gauss sferica di raggio $r > R_2$. Data la simmetria sferica delle cariche distribuite sulla superficie conduttrice della sfera e di quella volumetrica, il campo elettrico prodotto da questa distribuzione sarà diretto ortogonalmente alla superficie di Gauss e costante in ampiezza. Applicando di teorema di Gauss a questa superficie il campo elettrico può essere scritto come:

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q + Q_g)}{r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (1)$$

dove con Q_g si è indicata la carica totale contenuta nella distribuzione volumetrica. Poiché la distribuzione volumetrica è uniforme

$$Q_g = \frac{4\pi}{3} [(R_2)^3 - (R_1)^3] \rho_v \quad C \quad (2)$$

Essendo $R_2 = 2R_1$ si ottiene:

$$Q_g = \frac{28\pi}{3} (R_1)^3 \rho_v \quad C \quad (3)$$

Il campo elettrico a distanza $r \geq R_2 = 2R_1$ è quindi:

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left[Q + \frac{28\pi}{3} (R_1)^3 \rho_v \right] \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (4)$$

Il campo elettrico a distanza $r = 3R_1$ è quindi:

$$\underline{E}(3R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{9(R_1)^2} \left[Q + \frac{28\pi}{3} (R_1)^3 \rho_v \right] \hat{r} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{9(R_1)^2} + \frac{28\pi}{27} R_1 \rho_v \right] \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (6)$$

b)

Il potenziale a distanza $r \geq R_2$ è equivalente al potenziale generato da una carica puntiforme posta nel centro del sistema e di valore $Q + Q_g$ e cioè:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q + Q_g)}{r} \quad V \quad (7)$$

A distanza $R = 4R_1$ si ha:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q + Q_g)}{4R_1} \quad V \quad (8)$$

da cui:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 V(R) 4R_1 - Q_g \quad C \quad (9)$$

Sostituendo i valori:

$$Q_g \cong 10^{-8} \text{ C} \quad (10)$$

$$Q \cong 10^{-9} \text{ C} \quad (11)$$

Problema 2 (8 punti) Si considerino due distribuzioni lineari di carica, uguali in valore assoluto λ $[C/m]$, ma opposte in segno, piegate in modo da formare una circonferenza di raggio a , giacente sul piano $z = 0$. Con riferimento alla Fig. 2, l'eccesso di carica sulla semicirconferenza in rosso e' dato da nuclei di idrogeno, mentre quello sulla circonferenza in blu da elettroni. Calcolare:

- il vettore campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento;
- il valore del potenziale nel punto di cui sopra, ovvero nell'origine del sistema di riferimento.

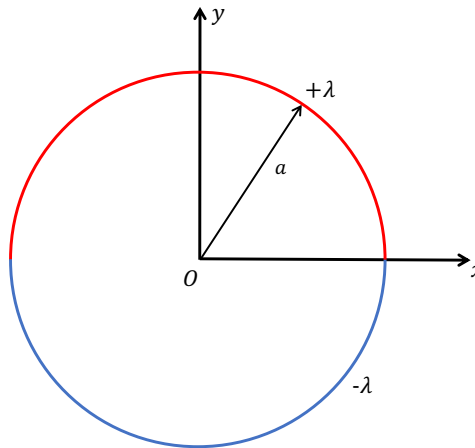


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione al problema 2

a)

Consideriamo inizialmente la semicirconferenza con distribuzione lineare di densità di carica uniforme positiva (linea rossa). Sia ϕ' una coordinata angolare, che cresce da x verso y ed è nulla in corrispondenza dell'asse x . Utilizzando la coordinata angolare ϕ' , il tratto infinitesimo di circonferenza dl' , su cui è localizzata la carica infinitesima $\lambda dl'$ può essere espresso da

$$dl' = a d\phi' \quad (12)$$

mentre il vettore $\underline{r}'$ che individua la posizione di tale carica infinitesima è:

$$\underline{r}' = a \sin \phi' \hat{x} + a \cos \phi' \hat{y} \quad (13)$$

Il contributo di campo elettrico elementare nell'origine dovuto alla carica elementare $\lambda dl'$ posizionata in $\underline{r}'$ è:

$$d\underline{E}^+(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\phi'}{a^3} (-a \sin \phi' \hat{x} - a \cos \phi' \hat{y}) \quad \frac{V}{m} \quad (14)$$

Considerando due contributi simmetrici rispetto all'asse y (vedi figura 3) si osserva subito che le componenti di campo elettrico elementare lungo y si sommano, mentre le componenti lungo x si annullano. Il campo elettrico totale sarà dato solo dalla sovrapposizione delle componenti lungo y e data la simmetria pari, il campo dovuto a questa distribuzione è equivalente al doppio di quello ottenuto integrando per

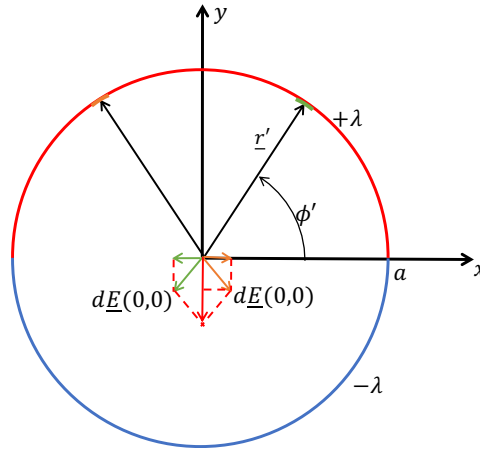


Figura 3: Geometria del problema 2

$\phi' \in [0, \pi/2]$:

$$\underline{E}^+(0,0) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda a d\phi'}{a^3} (-a \cos \phi' \hat{y}) \quad (15)$$

$$= -\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \int_0^{\pi/2} \cos \phi' d\phi' \hat{y} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (-\hat{y}) \frac{V}{m} \quad (17)$$

Per simmetria, anche il campo generato dalla distribuzione lineare di densità di carica negativa può essere calcolato nello stesso modo. Data la distribuzione negativa il contributo di campo sarà ancora diretto secondo $-\hat{y}$ cioè

$$\underline{E}^-(0,0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (-\hat{y}) \frac{V}{m} \quad (18)$$

Il campo elettrostatico totale nell'origine $\underline{E}_t(0,0)$ si ottiene sommando i contributi precedenti:

$$\underline{E}_t(0,0) = \underline{E}^+(0,0) + \underline{E}^-(0,0) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (-\hat{y}) \frac{V}{m} \quad (19)$$

b)

Consideriamo inizialmente la semicirconferenza con distribuzione lineare di densità di carica uniforme positiva (linea rossa), ed utilizziamo ancora la coordinata ϕ' definita al punto precedente. Il contributo elementare al potenziale nell'origine generato dalla carica infinitesima $\lambda dl'$ posizionata in $\underline{r}'$ può essere espresso da:

$$dV^+(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\phi'}{a} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} d\phi' V \quad (20)$$

Il potenziale totale si trova integrando la precedente espressione nell'intervallo $\phi' \in [0, \pi]$:

$$V^+(0,0) = \frac{\lambda\pi}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\lambda}{4\epsilon_0} V \quad (21)$$

Passando ora alla semicirconferenza con distribuzione lineare di densità di carica uniforme negativa (linea blu) ed utilizzando ancora una coordinata angolare ϕ' , il contributo elementare al potenziale nell'origine generato dalla carica infinitesima $-\lambda dl'$ posizionata in $\underline{r}'$ può essere espresso da:

$$dV^-(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\lambda a d\phi'}{a} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} d\phi' V \quad (22)$$

Integrando la precedente espressione nell'intervallo $\phi' \in [\pi, 2\pi]$ si ottiene:

$$V^-(0,0) = -\frac{\lambda}{4\epsilon_0} V \quad (23)$$

I due contributi al potenziale sono uguali ed opposti per cui il potenziale totale nell'origine è nullo.

Problema 3 (8 punti) Il circuito elettrico mostrato in figura è ottenuto piegando un filo conduttore, (con resistenza nulla), in modo da descrivere un tratto rettilineo e un arco di circonferenza di raggio a e centro nell'origine del sistema di riferimento. Il circuito si trova immerso in un campo magnetico uniforme di induzione $\underline{B} = B_0 \hat{y}$. All'interno del circuito è presente un generatore di tensione da $V_0 = 10$ volt, con resistenza interna R di 20Ω .

- calcolare l'espressione analitica delle forze magnetiche che agiscono sui 2 tratti e verificare che la risultante che agisce sul circuito chiuso è nulla;
- determinare il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso, nell'ipotesi che $a = 4 \text{ cm}$ e $B_0 = 1.167 \text{ T}$.

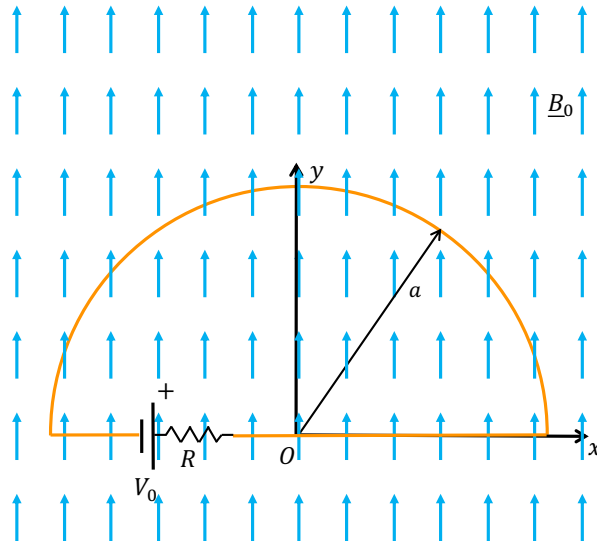


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione al problema 3

a)

Nel circuito circola una corrente I di 0.5 A , in senso antiorario.

Calcoliamo innanzitutto la forza che agisce, per effetto del campo di induzione magnetica, sul tratto semicircolare.

Come è noto, su un tratto infinitesimo di filo $d\underline{l}$, orientato secondo il verso di percorrenza della corrente, agisce la forza

$$d\underline{F} = I d\underline{l} \times \underline{B} \quad (24)$$

Sia ϕ una coordinata angolare, che cresce da x verso y ed è nulla in corrispondenza dell'asse x . Utilizzando la coordinata angolare ϕ' , il tratto infinitesimo di circonferenza può essere espresso da

$$d\underline{l} = (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) a d\phi$$

Dunque la forza che agisce sul tratto infinitesimo vale

$$d\underline{F} = -aIB_0 \sin \phi \hat{z}$$

Di conseguenza, la forza totale che agisce sulla semicirconferenza è

$$\underline{F}_{semi} = \left[-aIB_0 \int_0^\pi \sin \phi d\phi \right] \hat{z} = -2aIB_0 \hat{z} \text{ N}$$

Sul tratto rettilineo, invece, si ha

$$d\vec{l} = dx \hat{x}$$

Di conseguenza, in virtù di (24)

$$d\vec{F} = IB_0 \hat{z}$$

La forza totale sul tratto rettilineo è quindi

$$\vec{F}_{rect} = \left[IB_0 \int_{-a}^a dx \right] \hat{z} = 2aIB_0 \hat{z} \quad N$$

La risultante delle forze, ottenuta sommando le forze che agiscono sui due tratti, è nulla, in accordo a quanto stabilito dal teorema di Ampere.

b)

Il momento meccanico che agisce sul circuito chiuso è dato da $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$, dove $\vec{m} = IS\hat{n}$, in cui S è l'area racchiusa dal circuito e $\hat{n}$ è la normale al piano del circuito che vede circolare la corrente in senso antiorario (nel nostro caso $\hat{z}$). Il momento magnetico è quindi

$$\vec{m} = \frac{\pi}{2} a^2 I \hat{z} = 1.257 \cdot 10^{-3} \quad A \cdot m^2$$

Il momento meccanico vale quindi

$$\vec{M} = -\frac{\pi}{2} a^2 IB_0 \hat{x} = -1.466 \cdot 10^{-3} \hat{x} \quad N \cdot m$$

Problema 4 (8 punti) Si consideri la spira rettangolare in Fig. 5, ottenuta utilizzando del filo conduttore con resistenza totale R . La spira è tenuta in movimento in modo tale che il suo moto sia sempre rettilineo uniforme lungo $\hat{x}$, con velocità v . All'istante $t = 0$ la spira entra in una regione, di larghezza h (con $h > l$), in cui è presente un campo uniforme di induzione $\underline{B} = B_0 \hat{z}$.

- Calcolare l'espressione del modulo e il verso della corrente che scorre nella spira, al variare del tempo t .
- Determinare, al variare del tempo t , modulo, direzione e verso della forza che deve essere esercitata sulla spira in modo tale che possa essere mantenuta in moto rettilineo uniforme.

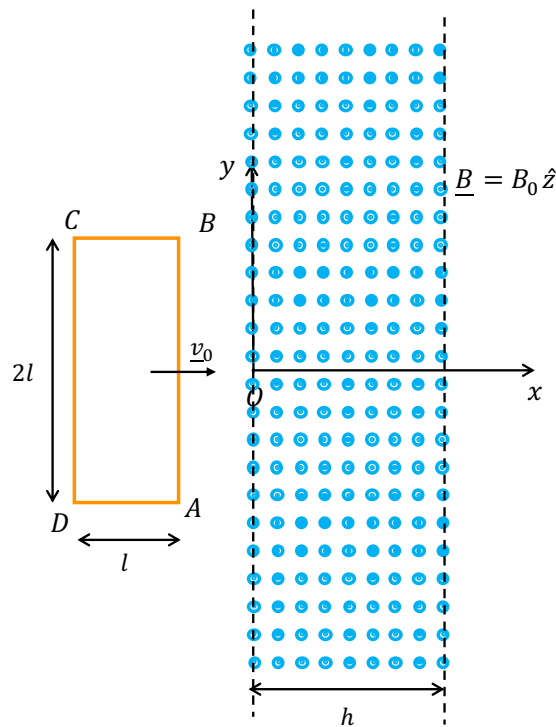


Figura 5: Geometria del problema 4

Soluzione al problema 4

a)

Dal tempo $t = 0$ al tempo $t = l/v$ la spira entra nella regione in cui è presente un campo di induzione magnetica. Si registra dunque un aumento del flusso del campo che attraversa la spira, e di conseguenza si produrrà, secondo la legge di Faraday, Neumann e Lenz, una fem che, essendo il circuito costituito da filo conduttore, farà circolare una corrente I . Poichè la corrente I è costituita da cariche in movimento, su di esse il campo $\underline{B}$ eserciterà una forza (forza di Lorentz), tale da opporsi alla variazione di flusso, ovvero una forza diretta verso $-\hat{x}$.

Dal tempo $t = l/v$ al tempo $t = h/v$ la spira sarà completamente immersa nella regione di campo di induzione magnetica uniforme. In questo caso il flusso del campo attraverso la spira sarà costante, e di conseguenza non si produrrà nessuna fem, nessuna corrente e nessuna forza.

Dal tempo $t = h/v$ al tempo $t = (h+l)/v$ la spira uscirà dalla regione a campo di induzione magnetica uniforme. Di conseguenza diminuirà il flusso del campo che attraversa la spira e, per la legge di Faraday, Neumann e Lenz, si produrrà una fem e, come sopra, una corrente. Sulle cariche in movimento verrà esercitata la forza di Lorentz, che è tale da opporsi alla variazione del flusso, e anche in questo caso sarà diretta lungo $-\hat{x}$.

Dal tempo $t = (h+l)/v$ la spira si troverà in una regione di campo nullo, e dunque su di essa non agirà nessuna forza.

Passiamo ai calcoli. Tra $t = 0$ e $t = l/v$ il flusso $\Phi(\underline{B})$

$$\Phi(\underline{B}) = 2lB_0vt \quad \text{Wb}$$

Il modulo della fem indotta varrà dunque $|fem| = 2lB_0v$ e la corrente che circola nel circuito avrà modulo $|I| = \frac{2lB_0v}{R}$. Concentriamoci sul tratto AB . Affinchè la forza di Lorentz su questo tratto sia tale da spingere la spira verso $-\hat{x}$, la corrente deve scorrere in senso orario. Il modulo della forza di Lorentz vale $|F_{AB}| = \frac{4l^2B_0^2v}{R}$.

Dal tempo $t = h/v$ al tempo $t = (h+l)/v$ il flusso varrà

$$\Phi(\underline{B}) = 2l^2B_0 - 2lB_0vt. \quad \text{Wb}$$

Il modulo della fem indotta varrà dunque $|fem| = 2lB_0v$ e la corrente che circola nel circuito avrà modulo $|I| = \frac{2lB_0v}{R}$. Concentriamoci sul tratto CD . Affinchè la forza di Lorentz su questo tratto sia tale da spingere la spira verso $-\hat{x}$, la corrente deve scorrere in senso orario. Il modulo della forza di Lorentz vale $|F_{CD}| = \frac{4l^2B_0^2v}{R}$. Ricapitolando, per la corrente abbiamo

$$I(t) = \begin{cases} \frac{2lB_0v}{R} A & \text{orario} & t \in (0, \frac{l}{v}) \\ \frac{2lB_0v}{R} A & \text{antiorario} & t \in (\frac{h}{v}, \frac{h+l}{v}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b)

Viste le considerazioni del punto precedente, per mantenere la spira in moto rettilineo uniforme, deve essere esercitata una forza solo quando la spira non è completamente all'interno o completamente all'esterno della regione con campo di induzione magnetica uniforme. La forza meccanica che deve essere esercitata è tale da opporsi alla forza di Lorentz. Da notare che la risultante delle forze sui lati paralleli alla direzione di moto è nulla per simmetria. Dunque la forza meccanica che deve essere esercitata è opposta alla forza che agisce sul lato perpendicolare alla direzione di moto immerso nella regione di campo. Utilizzando quanto calcolato in precedenza si ha

$$\underline{F}(t) = \begin{cases} \frac{4l^2B_0^2v}{R} \hat{x} N & t \in (0, \frac{l}{v}) \\ \frac{4l^2B_0^2v}{R} \hat{x} N & t \in (\frac{h}{v}, \frac{h+l}{v}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$