

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

8 Luglio 2021.

Problema 1 (8 punti) Una sfera conduttrice di raggio R_1 è viene caricata con una quantità di carica Q_0 e si trova all'interno di un guscio sferico conduttore di raggio interno $R_2 = 2 \cdot R_1$ e raggio $R_3 = 4 \cdot R_1$ anch'esso caricato con una carica Q_0 . In un secondo momento i due conduttori vengono collegati nei punti A e B da un filo sottilissimo conduttore, di capacità trascurabile. Determinare:

- Le densità di carica superficiale sulle superfici esterne della sfera e del guscio prima che i due conduttori siano collegati dal filo e dopo il collegamento.
- La variazione di energia elettrostatica del sistema che si ha a seguito del collegamento dei due conduttori da parte del filo.

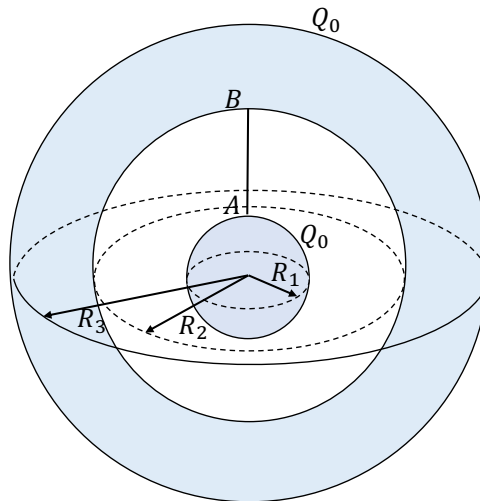


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a) Nella configurazione iniziale siamo in presenza di induzione completa per cui le cariche sulle superfici di raggio R_1 , R_2 e R_3 sono rispettivamente Q_0 (nativa), $-Q_0$ (indotta) e $2Q_0$ composta da Q_0 nativa e Q_0 indotta. Data la simmetria sferica le cariche si distribuiscono uniformemente sulle superfici per cui si ha:

Superficie di raggio R_1 : $\sigma_1 = \frac{Q_0}{4\pi(R_1)^2} \frac{C}{m^2}$

Superficie di raggio R_2 : $\sigma_2 = -\frac{Q_0}{4\pi(R_2)^2} = -\frac{1}{4} \frac{Q_0}{4\pi(R_1)^2} = -0.25\sigma_1 \frac{C}{m^2}$

Superficie di raggio R_3 : $\sigma_3 = \frac{2Q_0}{4\pi(R_3)^2} = \frac{1}{8} \frac{Q_0}{4\pi(R_1)^2} = 0.125\sigma_1 \frac{C}{m^2}$

Connettendo le due regioni conduttrici con un filo conduttore, si avrà un transitorio molto breve in cui le cariche si redistribuiscono portandosi tutte sulla superficie esterna dove, una volta raggiunta la situazione di equilibrio, troveremo globalmente una carica $2Q_0$. Si avrà quindi:

Superficie di raggio R_1 : $\sigma'_1 = 0 \frac{C}{m^2}$

Superficie di raggio R_2 : $\sigma'_2 = 0 \frac{C}{m^2}$

Superficie di raggio R_3 : $\sigma'_3 = \frac{2Q_0}{4\pi(R_3)^2} = \frac{1}{8} \frac{Q_0}{4\pi(R_1)^2} = 0.125\sigma_1 \frac{C}{m^2}$

b) Il campo elettrostatico esterno al guscio, dopo il collegamento dei conduttori, rimane lo stesso che si aveva prima del collegamento. L'energia elettrostatica immagazzinata da questo campo elettrostatico nella regione che si estende dalla superficie di raggio R_3 fino all'infinito non cambia. L'unica variazione di campo elettrostatico si ha all'interno dell'intercapedine. Prima del collegamento il campo elettrostatico è dato da

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (1)$$

Dopo il collegamento dei conduttori nell'intercapedine il campo elettrostatico risulta nullo, quindi la variazione di energia elettrostatica sarà pari all'energia elettrostatica immagazzinata nell'intercapedine prima del collegamento $U_{diff} = U_{iniz} - 0$. Essendo una geometria sferica con due cariche $+Q_0$ e $-Q_0$ l'energia elettrostatica immagazzinata corrisponde a quella immagazzinata da un condensatore sferico. La capacità del condensatore sferico è:

$$C_s = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{2(R_1)^2}{R_1} = 4\pi\epsilon_0 2R_1 \quad F \quad (2)$$

L'energia elettrostatica immagazzinata prima del collegamento è quindi

$$U_{iniz} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0 2R_1} = \frac{Q_0^2}{16\pi\epsilon_0 R_1} \quad J \quad (3)$$

che corrisponde anche alla variazione di energia elettrostatica fra le due situazioni.

Problema 2 (8 punti) Un conduttore cilindrico di raggio $a = 1 \text{ mm}$ e lunghezza $L = 1 \text{ m}$ ($L \gg a$) è rivestito da una guaina cilindrica isolante di materiale dielettrico, lineare, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2$. La guaina cilindrica ha raggio interno a e raggio esterno $b = 3a$. Sul conduttore viene depositata una carica $Q = 1 \mu\text{C}$. Trascurando l'effetto ai bordi, determinare:

- la differenza di potenziale fra il centro del conduttore e un punto sulla superficie esterna della guaina.
- tipologia e valore della carica totale presente sulla superficie esterna della guaina.

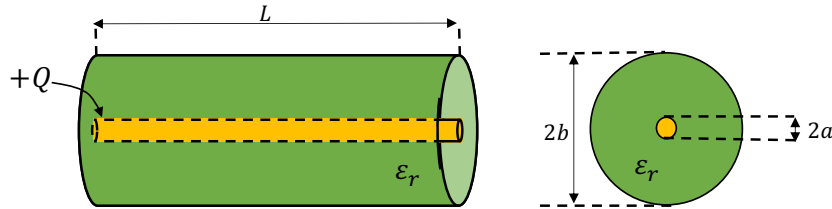


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a) Il conduttore interno è una regione equipotenziale per cui non cambia tra il centro del conduttore e un punto sulla superficie del conduttore stesso. Data la simmetria cilindrica del problema, applicando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici ad una superficie cilindrica di raggio $a < r_c < b$ si ottiene:

$$D 2\pi r_c L = Q \quad (4)$$

Da cui:

$$\underline{D}(r_c) = \frac{Q}{2\pi L r_c} \hat{r}_c \quad (5)$$

essendo r_c la distanza dall'asse cilindrico e $\hat{r}_c$ un versore diretto perpendicolarmente all'asse. Per un dielettrico omogeneo, isotropo, lineare si ha in tutti i punti interni al dielettrico $\underline{D}(r_c) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(r_c)$. Quindi il campo elettrico all'interno del dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}(r_c) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L r_c} \hat{r}_c \quad (6)$$

La differenza di potenziale si calcola integrando lungo un cammino rettilineo tra la superficie esterna del conduttore e quella esterna della guaina dielettrica:

$$V(a) - V(3a) = \int_a^{3a} \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L r_c} \hat{r}_c \cdot \hat{r}_c dr_c \quad (7)$$

$$= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \int_a^{3a} \frac{1}{r_c} dr_c = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \ln \frac{3a}{a} \quad (8)$$

$$= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \ln(3) = 9.87 \text{ kV} \quad (9)$$

b) Il vettore di polarizzazione $\underline{P}(r_c)$ in un punto interno al dielettrico è $\underline{P}(r_c) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\underline{E}(r_c)$ per cui:

$$\underline{P}(r_c) = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{2\pi L r_c} \hat{r}_c \quad (10)$$

La densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie esterna può essere calcolata ricordando che:

$$\sigma_p = \underline{P}(\underline{r}) \cdot \hat{n}|_{\underline{r} \in S} \quad (11)$$

per cui sulla superficie esterna di raggio $r_c = 3a$ si ha:

$$\sigma_p = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{2\pi L r_c} \hat{r}_c \cdot \hat{r}_c \Big|_{r_c=3a} \quad (12)$$

$$= \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{2\pi L 3a} \quad (13)$$

$$(14)$$

Poiché la carica è distribuita uniformemente, la carica totale di polarizzazione presente sulla superficie esterna della guaina è

$$Q_p = \sigma_p 2\pi L 3a = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} Q = \frac{Q}{2} = 0.5 \mu C. \quad (15)$$

Problema 3 (8 punti) Un circuito percorso da corrente stazionaria I_1 è costituito da due conduttori rettilinei semiinfiniti e da un tratto di conduttore a forma di semicirconferenza con centro l'origine, e raggio a , disposti nel vuoto come mostrato in figura 3. Una seconda piccola spira di filo conduttore di raggio $b \ll a$, percorsa da corrente stazionaria I_2 in senso antiorario rispetto alla direzione $\hat{y}$, è posizionata con il centro in O e giace sul piano $x - z$. Determinare:

- l'espressione del vettore induzione magnetica nell'origine del sistema di riferimento in funzione di I_1 ed a ;
- il vettore momento meccanico agente sulla di raggio b nell'ipotesi che il campo di induzione magnetica su tutti i punti del piano della piccola spira sia costante ed uguale a quello al centro. Si consideri $I_2 = 10I_1$, $b = a \cdot 10^{-2}$, $I_1 = 10 \text{ A}$, e $a = 4 \text{ m}$.

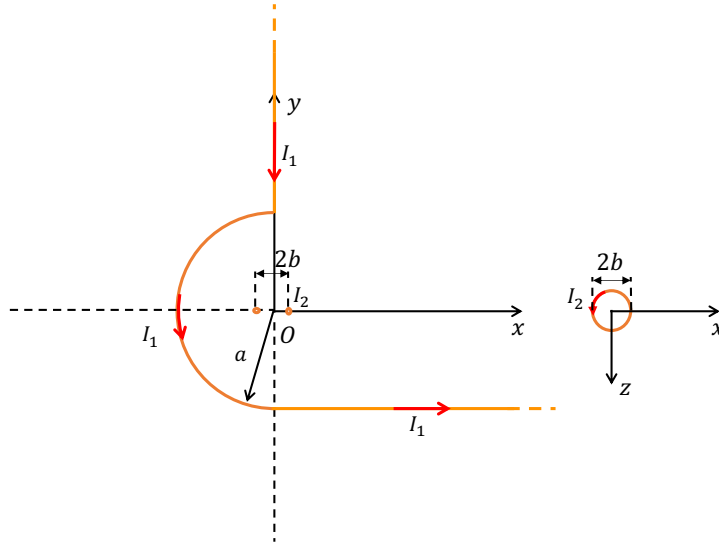


Figura 3: Geometria del problema 3

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}})$$

Soluzione del problema 3

b) (vedi anche soluzione del problema 4 del compito scritto del 15/6/2021)

Il vettore induzione magnetica generato nell'origine del sistema di riferimento può essere calcolato utilizzando la prima formula di Laplace, ed integrando lungo il cammino percorso dalla corrente I_1 :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (16)$$

Indichiamo con 1 il tratto rettilineo lungo l'asse y , con 2 il tratto rettilineo parallelo all'asse x e con 3 il tratto curvilineo.

Il tratto 1 non genera nessun campo di induzione magnetica nell'origine.

Per simmetria circolare, il tratto 2 genera un campo di induzione magnetica nell'origine pari alla metà di quello prodotto da una spira circolare $\underline{B}_s(0,0)$ per cui:

$$\underline{B}_2(0,0) = \frac{1}{2}\underline{B}_s(0,0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_0}{2} \frac{I_1}{a} \hat{z} \right] = \frac{\mu_0}{4} \frac{I_1}{a} \hat{z} \quad (17)$$

Il campo di induzione magnetica generato dal filo rettilineo che si trova a distanza a dall'origine è pari alla metà di quello prodotto da un filo rettilineo infinito percorso dalla stessa corrente $\underline{B}_f(0,0)$, per cui

$$\underline{B}_3(0,0) = \frac{1}{2}\underline{B}_f(0,0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{a} \hat{z} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{a} \hat{z} \quad (18)$$

L'induzione magnetica totale è data dalla somma dei due contributi dovuti ai tratti 2 e 3:

$$\underline{B}_t(0,0) = \underline{B}_2(0,0) + \underline{B}_3(0,0) = \frac{\mu_0}{4} \frac{I_1}{a} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \hat{z} \frac{Wb}{m^2} \quad (19)$$

b) Poiché possiamo considerare il campo di induzione magnetica uniforme su tutto il piano della spira, il momento meccanico è dato da:

$$\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}_t(0,0) \quad (20)$$

dove $\underline{m} = \pi b^2 I_2 \hat{y}$ è il momento magnetico associato alla spira di raggio b . Svolgendo i calcoli:

$$\underline{M} = [\pi b^2 I_2 \hat{y}] \times \left[\frac{\mu_0}{4} \frac{I_1}{a} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \hat{z} \right] \quad (21)$$

$$= \frac{\mu_0}{4} \frac{\pi b^2 I_2 I_1}{a} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \hat{x} \quad (22)$$

$$= \frac{\mu_0}{4} \frac{\pi a^2 \cdot 10^{-4} I_2 I_1}{a} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \hat{x} = 5.2 \cdot 10^{-7} N \cdot m \quad (23)$$

Problema 4 (8 punti) Una spira rettangolare conduttrice di lati l e $2l$, giace sul piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. La spira è costituita da un filo conduttore a sezione circolare di raggio a e conducibilità σ e trasla con velocità costante $\underline{v} = v_0 \hat{x}$. Un filo rettilineo infinito di conduttore ideale, percorso da corrente stazionaria $I = I_0(-\hat{y})$ giace sullo stesso piano della spira, posizionato in $x_1 = -d\hat{x}$ dall'asse y . All'istante $t = 0$, il lato CD della spira si trova sull'asse y , come in figura 4. Determinare:

- l'espressione dell'ampiezza della forza elettromotrice indotta nella spira all'istante $t > 0$;
- ampiezza e verso della corrente indotta che percorre la spira all'istante $t = 1.5 \text{ sec}$ nell'ipotesi che $a = 1.954 \text{ cm}$, $\sigma = 5 \cdot 10^2 [\Omega \cdot m]^{-1}$, $I_0 = 100 \text{ A}$, $l = d = 1 \text{ m}$, $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

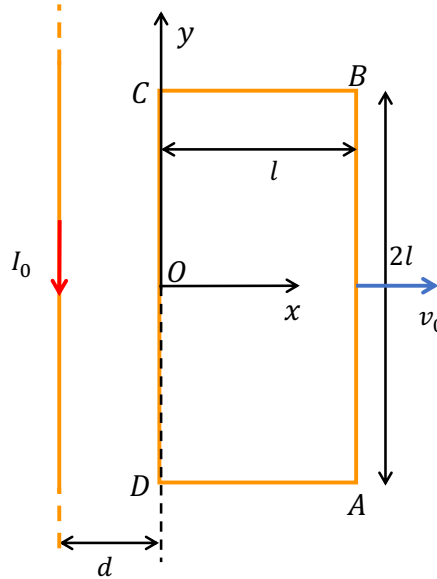


Figura 4: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

a) La legge di Biot-Savart afferma che il campo magnetico generato dal filo rettilineo percorso da corrente $I_0(-\hat{y})$ in tutti punti sul piano $x - y$ è:

$$\underline{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{|x + d|} \hat{z} \quad (24)$$

La spira trasla di moto rettilineo uniforme nel senso delle x crescenti. Se indichiamo con $x(t) = v_0 t$ la posizione del lato CD all'istante di tempo $t \geq 0$, il flusso magnetico attraverso l'area della spira a questo istante di tempo può essere calcolato come

$$\Phi(t) = \int_{-l}^l \int_{x(t)}^{x(t)+l} \underline{B}(x') \cdot \hat{z} dx' dy' \quad (25)$$

dove con x' si è indicata la coordinata di integrazione sul piano della spira al tempo t . Svolgendo i calcoli, poiché per $t \geq 0$, $|x + d| = (x + d)$, si ha

$$\Phi(t) = 2l \int_{x(t)}^{x(t)+} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{(x' + d)} \hat{z} \cdot \hat{z} dx' \quad (26)$$

$$\frac{\mu_0 I_0 l}{\pi} \int_{x(t)}^{x(t)+l} \frac{1}{(x' + d)} \hat{z} \cdot \hat{z} dx' \quad (27)$$

$$\frac{\mu_0 I_0 l}{\pi} [\ln(x' + d)]_{x(t)}^{x(t)+l} = \frac{\mu_0 I_0 l}{\pi} \ln \frac{(v_0 t + l + d)}{(v_0 t + d)} \text{ Wb} \quad (28)$$

Per la legge di Farady-Neumann-Lenz, l'ampiezza della forza elettromotrice indotta è

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I_0 l}{\pi} \frac{v_0 l}{(v_0 t + d)(v_0 t + d + l)} \text{ V} \quad (29)$$

b) La forza elettromotrice indotta dalla variazione di flusso al tempo $t = 1.5 \text{ sec}$ è

$$|\mathcal{E}_i(1.5)| = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 1}{\pi} \frac{2}{(3 + 1)(3 + 2)} \cong 4 \text{ } \mu\text{V} \quad (30)$$

La lunghezza totale del filo conduttore che costituisce la spira è $L = 6 \text{ m}$ e la sua sezione è $S = \pi a^2 = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. La resistenza totale del filo è quindi:

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S} \cong 10 \text{ } \Omega \quad (31)$$

La corrente indotta che percorre la spira all'istante $t = 1.5 \text{ sec}$ è quindi

$$I_i = \frac{|\mathcal{E}_i(1.5)|}{R} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{10} \cong 0.4 \text{ } \mu\text{A} \quad (32)$$

Poiché durante il moto il flusso diminuisce costantemente, la corrente indotta circola in senso antiorario.