

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

2 Settembre 2021.

Problema 1 (8 punti) Quattro cariche puntiformi sono posizionate ai vertici $ABCD$ di un quadrato di lato $L = 0.1 \text{ m}$ giacente sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Il centro del quadrato coincide con l'origine del sistema di riferimento (vedi figura 1). I valori delle quattro cariche sono rispettivamente $Q_A = Q_C = Q$ e $Q_B = Q_D = -Q$ con $Q = 2 \mu\text{C}$.

- Determinare l'espressione vettoriale della forza totale agente sulla carica posizionata nel vertice A .
- Determinare il valore dell'energia elettrostatica del sistema di cariche.

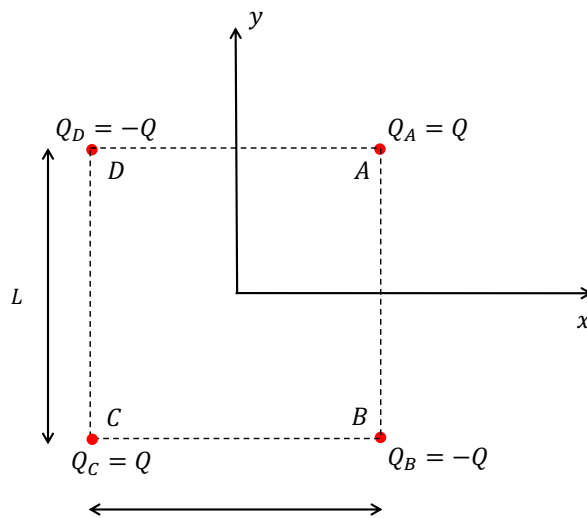


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)

Il campo elettrostatico $\underline{E}_i(\underline{r})$ generato nel punto $\underline{r}$ da una carica puntiforme di valore q_i posizionata in $\underline{r}_i$ è dato dall'espressione:

$$\underline{E}_i(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i) \quad (1)$$

Considerando le posizioni delle tre cariche poste in B , C e D , ed utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo elettrostatico totale nel punto di osservazione $\underline{r} = \frac{L}{2}(\hat{x} + \hat{y})$ dove è

posizionata la carica Q_A è dato da:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_B(\underline{r}) + \underline{E}_C(\underline{r}) + \underline{E}_D(\underline{r}) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(-Q)}{L^2} \hat{y} + \frac{Q}{2L^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) + \frac{(-Q)}{L^2} \hat{x} \right\} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(-Q)}{L^2} (\hat{x} + \hat{y}) + \frac{Q}{2L^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) \right\} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right) (\hat{x} + \hat{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L^2} \left(\frac{\sqrt{2} - 4}{4} \right) (\hat{x} + \hat{y}) \quad (5)$$

$$\cong (-1.162 \cdot 10^6) (\hat{x} + \hat{y}) \text{ V/m} \quad (6)$$

La forza totale agente sulla carica posta in A è:

$$\underline{F}(\underline{r}) = Q \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{L^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right\} (\hat{x} + \hat{y}) = -2.324 (\hat{x} + \hat{y}) \text{ N} \quad (7)$$

b)

L'energia elettrostatica rappresenta il lavoro fatto per assemblare il sistema di cariche portandole dall'infinito nella loro posizione finale e quindi:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q_A Q_B}{|\underline{r}_A - \underline{r}_B|} + \frac{Q_A Q_C}{|\underline{r}_A - \underline{r}_C|} + \frac{Q_A Q_D}{|\underline{r}_A - \underline{r}_D|} + \frac{Q_B Q_C}{|\underline{r}_B - \underline{r}_C|} + \frac{Q_B Q_D}{|\underline{r}_B - \underline{r}_D|} + \frac{Q_C Q_D}{|\underline{r}_C - \underline{r}_D|} \right\} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-Q^2}{L} + \frac{Q^2}{\sqrt{2}L} + \frac{-Q^2}{L} + \frac{-Q^2}{L} + \frac{Q^2}{\sqrt{2}L} + \frac{-Q^2}{L} \right\} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-4Q^2}{L} + \frac{\sqrt{2}Q^2}{L} \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q^2}{L} \right) (\sqrt{2} - 4) \quad (11)$$

$$\cong -0.93 \text{ J} \quad (12)$$

Problema 2 (8 punti) Si consideri una sfera conduttrice di raggio esterno $R_2 = R$ con al centro una cavità sferica concentrica vuota di raggio $R_1 = \frac{R}{5}$. La sfera conduttrice cava è rivestita esternamente da un guscio isolante di spessore $d = \frac{R}{5}$ costituito da materiale dielettrico, lineare, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r . Sulla sfera conduttrice cava è presente una carica Q . Determinare:

- l'espressione della capacità elettrostatica del conduttore;
- l'energia elettrostatica immagazzinata dal sistema nell'ipotesi che $\epsilon_r = 4$, $Q = 15.947 \mu C$ e $R = 1 m$.

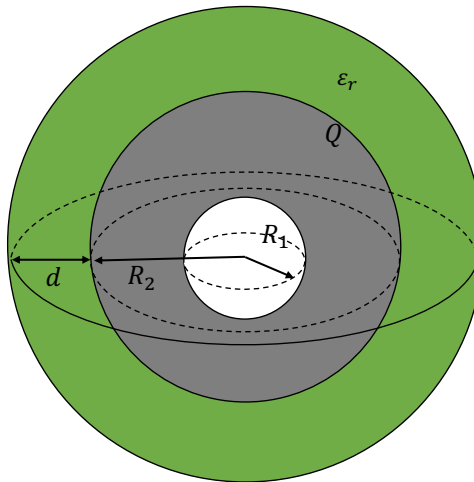


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a) La sfera cava è una regione equipotenziale per cui il potenziale può essere calcolato su un punto qualsiasi posto sulla superficie del conduttore stesso. La carica totale Q è distribuita uniformemente sulla superficie di raggio R_2 con densità superficiale

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R_2^2} \quad (13)$$

Ai fini del calcolo del potenziale la presenza della cavità vuota all'interno della sfera conduttrice è ininfluenza.

Data la simmetria sferica del problema, è possibile determinare l'espressione della componente radiale D_r del vettore induzione elettrica all'interno del dielettrico applicando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici ad una superficie sferica di raggio $R < r < (R + R/5)$:

$$D_r 4\pi r^2 = Q \quad (14)$$

Il vettore induzione elettrica $\underline{D}(r)$ all'interno del dielettrico è quindi:

$$\underline{D}(r) = D_r \hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (15)$$

essendo r la distanza dal centro del sistema sferico e $\hat{r}$ un versore diretto radialmente. Per un dielettrico omogeneo, isotropo, lineare si ha in tutti i punti interni al dielettrico $\underline{D}(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(r)$ Quindi il campo elettrico all'interno del dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}_d(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \quad (16)$$

Per quanto riguarda il campo elettrico esterno alla guaina dielettrica, sempre sfruttando la simmetria sferica del problema ed applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $r > (R + \frac{R}{5})$ si ottiene facilmente:

$$\underline{E}_0(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \frac{V}{m} \quad (17)$$

Il potenziale $V(R)$ a cui si trova il conduttore si calcola integrando lungo un cammino rettilineo radiale che si estende dall'infinito fino alla superficie esterna del conduttore il lavoro elementare $\underline{E}(r) \cdot d\vec{r}$ che si compie contro le forze del campo per spostare una carica positiva unitaria di un tratto dr :

$$V(R) = \int_R^{(R+\frac{R}{5})} \underline{E}_d(r) \cdot \hat{r} dr + \int_{(R+\frac{R}{5})}^{\infty} \underline{E}_0(r) \cdot \hat{r} dr \quad (18)$$

$$= \int_R^{(R+\frac{R}{5})} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr + \int_{(R+\frac{R}{5})}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad (19)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{(R+\frac{R}{5})} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{(R+\frac{R}{5})}^{\infty} \quad (20)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{(R+\frac{R}{5})} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R+\frac{R}{5})} \quad (21)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{(R+\frac{R}{5})} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{\epsilon_r R + \frac{R}{5}}{R(R+\frac{R}{5})} \right] \quad (22)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R} \left(\frac{5\epsilon_r + 1}{6} \right) V \quad (23)$$

La capacità elettrostatica C del conduttore è

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r [R(R+\frac{R}{5})]}{\epsilon_r R + \frac{R}{5}} = \frac{24\pi\epsilon_0\epsilon_r R}{5\epsilon_r + 1} \quad F \quad (24)$$

b) L'energia potenziale immagazzinata in questa configurazione può essere agevolmente determinata ricordando che l'energia elettrostatica immagazzinata da un sistema di N conduttori è:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (25)$$

dove con q_i e V_i abbiamo indicato rispettivamente la carica e il potenziale del conduttore i -esimo. Nel nostro caso, essendo in presenza di un solo conduttore carico, che si trova a potenziale $V(R)$, si ha :

$$U = \frac{1}{2} Q V(R) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{\epsilon_r R + \frac{R}{5}}{R(R+\frac{R}{5})} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r R} \left(\frac{5\epsilon_r + 1}{6} \right) \cong 1 \text{ J} \quad (26)$$

Problema 3 (8 punti) Un filo conduttore rettilineo infinito coincidente con l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, posto nel vuoto, è percorso da una corrente stazionaria $\underline{I}_0 = I_0 \hat{z}$. Si consideri i due percorsi orientati chiusi $ABCD$ di forma quadrata di lato L , giacente sul piano xy con centro nell'origine e $AEFBA$ anch'esso di forma quadrata di lato L giacente sul piano xy con centro nel punto $O' = (L, 0, 0)$ (vedi figura 3). Nell'ipotesi che sia $L = 0.1 \text{ m}$ determinare:

- il valore della corrente I_0 necessario per generare nel punto A un campo di induzione magnetica di valore $|\underline{B}(A)| = 282.85 \mu\text{T}$.
- il valore della circuitazione del campo magnetico $\underline{H}(\underline{r})$ lungo i percorsi chiusi orientati $ABCD$ e $AEFBA$.

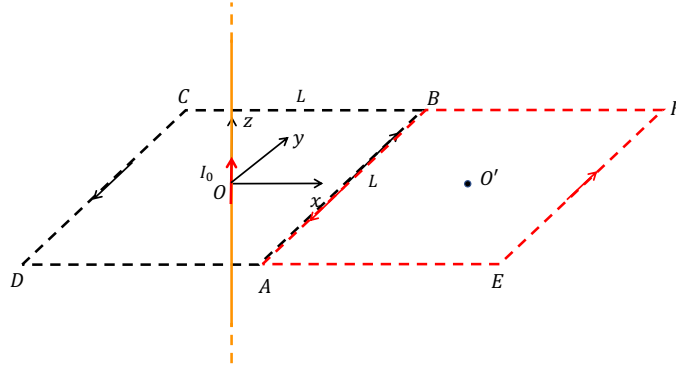


Figura 3: Geometria del problema 3

$$(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}})$$

Soluzione del problema 3

a) Il vettore induzione magnetica generato dal filo rettilineo percorso da corrente $\underline{I}_0 = I_0 \hat{z}$ in un qualsiasi punto sul piano $x - y$ è:

$$\underline{B}(x, y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\phi} \quad (27)$$

dove con $\hat{\phi}$ si è indicato il versore azimutale di un sistema di riferimento cilindrico associato al sistema rettangolare. Nel punto A di coordinate $A = (\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)$ la distanza dall'origine è $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$. Il modulo del campo di induzione magnetica nel punto A è:

$$|\underline{B}(A)| = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}\pi} \frac{I_0}{L} \quad (28)$$

da cui:

$$I_0 = \frac{\pi}{\mu_0} \sqrt{2} L |\underline{B}(A)| \quad (29)$$

Sostituendo i valori:

$$I_0 = \frac{\pi}{4\pi \cdot 10^{-7}} \sqrt{2} \cdot 1 \cdot |282.85 \cdot 10^{-6}| \cong 100 \text{ A} \quad (30)$$

b) Applicando la legge della circuitazione di Ampere si ha per il circuito chiuso $ABCD$:

$$C_1 = \oint_{ABCD} \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = I_0 = 100 \text{ A} \quad (31)$$

mentre per il circuito chiuso $AEFBA$:

$$C_2 = \oint_{AEFBA} \underline{H}(\underline{r}) \cdot d\underline{l} = 0 \quad (32)$$

Problema 4 (8 punti) Un filo rettilineo infinito, coincidente con l'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, è percorso da corrente variabile $\underline{I}(t) = -I(t)\hat{y}$ caratterizzata dal seguente andamento temporale:

$$I(t) = \begin{cases} \alpha \left[1 - \left(\frac{t-T}{T} \right)^2 \right] & 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (33)$$

dove $\alpha = 8 \text{ A}$ e $T = 4 \text{ msec}$. Una spira quadrata conduttrice di lato $L = 0.2 \text{ m}$, complanare con il filo, è posizionata con il lato più vicino al filo a distanza $d = 5 \text{ cm}$ dal filo stesso. La spira conduttrice è costituita da un materiale conduttore di conducibilità uniforme $\sigma = 2.104 \cdot 10^3 [\Omega \cdot \text{m}]^{-1}$ a sezione circolare di raggio $a = 1.1 \text{ mm}$. Determinare:

- il coefficiente di mutua induzione tra la spira e il filo;
- l'intensità massima della corrente indotta nella spira, (trascurando tutti i fenomeni di autoinduzione).

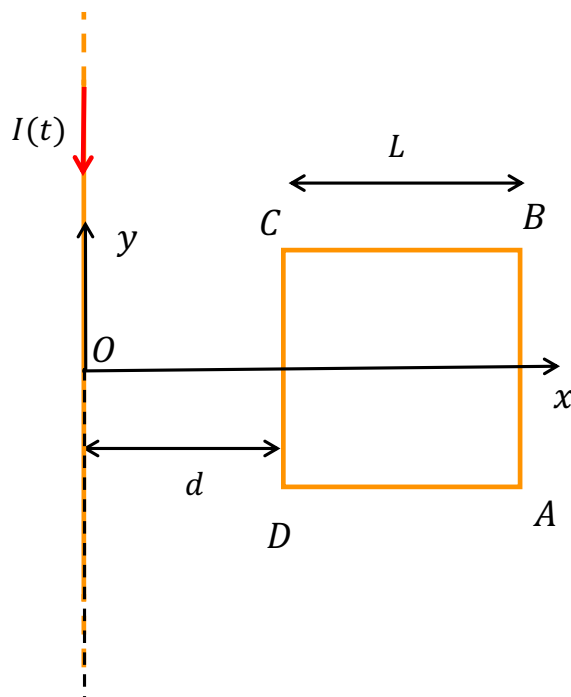


Figura 4: Geometria del problema 4

Soluzione del problema 4

a)

L'asse $\hat{z}$ del sistema di riferimento cartesiano è uscente nel foglio. Il vettore induzione magnetica generato dal filo rettilineo percorso da corrente $I(t)$ in un punto di osservazione $P = (x, y)$ sul piano $x - y$ è:

$$\underline{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{x} \hat{z} \quad (34)$$

dove x è la distanza del punto di osservazione $P = (x, y)$ dal filo.

Il flusso magnetico attraverso l'area della spira può essere calcolato come

$$\Phi(\underline{B}) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_d^{d+L} \underline{B}(x) \cdot \hat{z} dx dy \quad (35)$$

Sostituendo l'espressione (34) si ottiene:

$$\Phi(\underline{B}) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_d^{d+L} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{x} \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) L \int_d^{d+L} \frac{1}{x} dx \quad (36)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) L \ln \left[\frac{(d+L)}{d} \right] = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) L \ln \left[1 + \frac{L}{d} \right] \quad (37)$$

Il coefficiente di mutua induzione M risulta quindi:

$$M = \frac{\Phi(\underline{B})}{I(t)} = \frac{\mu_0}{2\pi} L \ln \left[1 + \frac{L}{d} \right] \quad (38)$$

Sostituendo i valori si ottiene $M \cong 64.37 \text{ nH}$:

b)

La forza elettromotrice indotta nella spira quadrata dalla variazione di flusso è data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d\Phi(\underline{B})}{dt} = -M \frac{dI(t)}{dt} = M 2\alpha \frac{(t-T)}{T^2} \quad (39)$$

Il massimo dell'ampiezza della tensione indotta $|\mathcal{E}_i|_{max}$ si raggiunge per $t = 0$ e per $t = 2T$. In entrambi i casi:

$$|\mathcal{E}_i|_{max} = 2M \frac{\alpha}{T} \cong 2.575 \cdot 10^{-4} \text{ V} \quad (40)$$

$$(41)$$

La lunghezza totale del filo conduttore che costituisce la spira è $L_{tot} = 4L = 0.8 \text{ m}$ e l'area della sua sezione circolare è $S = \pi a^2 = 3.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. La resistenza totale del filo è quindi:

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S} \cong 100 \Omega \quad (42)$$

La corrente massima indotta è quindi

$$I_i^{max} = \frac{|\mathcal{E}_i|_{max}}{R} \cong 2.575 \mu\text{A} \quad (43)$$