

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

17 Settembre 2021.

Problema 1 (8 punti) Si considerino due distribuzioni lineari uniformi di carica, uguali in valore assoluto $|\lambda|$ [C/m], ma opposte in segno, piegate in modo da formare due quarti opposti di una circonferenza di raggio a , giacente sul piano $z = 0$ (Fig. 1). La distribuzione di carica positiva si estende per $0 < \phi' < \frac{\pi}{2}$ mentre la distribuzione di carica negativa si estende per $\pi < \phi' < \frac{3\pi}{2}$. Determinare ¹:

- L'espressione del vettore campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento;
- il valore della distribuzione lineare di carica elettrica λ sapendo che il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie sferica con centro nel punto $C = (-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$ e raggio $R = a$, è $\Phi(\underline{E}) = -1.77 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}$ e che $a = 0.5 \text{ m}$.

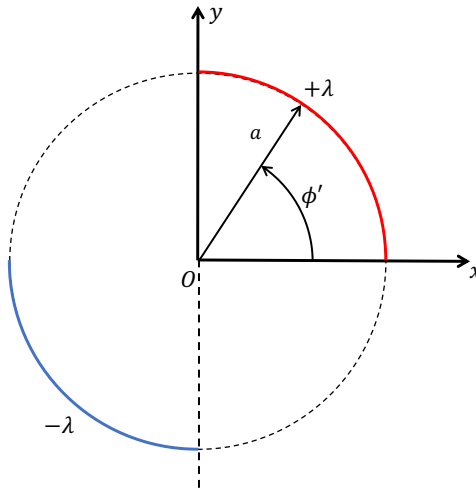


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione al problema 1

a)

Consideriamo inizialmente la semicirconferenza con distribuzione lineare di densità di carica uniforme positiva (linea rossa). Sia ϕ' una coordinata angolare, che cresce da x verso y ed è nulla in corrispondenza dell'asse x . Utilizzando la coordinata angolare ϕ' , il tratto infinitesimo di circonferenza dl' , su cui è localizzata la carica infinitesima $\lambda dl'$ può essere espresso da

$$dl' = a d\phi' \quad (1)$$

mentre il vettore $\underline{r}'$ che individua la posizione di tale carica infinitesima è:

$$\underline{r}' = a \cos \phi' \hat{x} + a \sin \phi' \hat{y} \quad (2)$$

¹ $\left(\epsilon_0 \cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \right)$

Il contributo di campo elettrico elementare nell'origine dovuto alla carica elementare $\lambda dl'$ posizionata in $\underline{r}'$ è:

$$d\underline{E}^+(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\phi'}{a^3} (-a \cos \phi' \hat{x} - a \sin \phi' \hat{y}) \frac{V}{m} \quad (3)$$

Il campo elettrico totale nell'origine sarà dato solo dalla sovrapposizione di questi contributi elementari:

$$\underline{E}^+(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda d\phi'}{a} (-\cos \phi' \hat{x} - \sin \phi' \hat{y}) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \int_0^{\pi/2} (-\cos \phi' \hat{x} - \sin \phi' \hat{y}) d\phi' \quad (5)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (\hat{x} + \hat{y}) \frac{V}{m} \quad (6)$$

Per simmetria, anche il campo generato dalla distribuzione lineare di densità di carica negativa può essere calcolato nello stesso modo. Data la distribuzione negativa il contributo di campo sarà ancora diretto secondo $-(\hat{x} + \hat{y})$ cioè:

$$\underline{E}^-(0,0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (\hat{x} + \hat{y}) \frac{V}{m} \quad (7)$$

Il campo elettrostatico totale nell'origine $\underline{E}_t(0,0)$ si ottiene sommando i contributi precedenti:

$$\underline{E}_t(0,0) = \underline{E}^+(0,0) + \underline{E}^-(0,0) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (\hat{x} + \hat{y}) \frac{V}{m} \quad (8)$$

b)

Per il teorema di Gauss il flusso del vettore campo elettrico attraverso una superficie chiusa $\Phi(\underline{E})$ è

$$\Phi(\underline{E}) = \oint_S \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (9)$$

dove Q è la carica totale contenuta dalla superficie. Nel caso in questione, la superficie sferica di centro nel punto $C = (-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$ e raggio $R = a$ racchiude completamente solo la distribuzione di carica negativa per cui:

$$\Phi(\underline{E}) = \frac{-\lambda\pi a}{2\epsilon_0} \quad (10)$$

da cui si ricava (in valore assoluto)

$$\lambda = \left| -\Phi(\underline{E}) \frac{2\epsilon_0}{\pi a} \right| = 2 \frac{\mu C}{m} \quad (11)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore ideale piano in aria con armature quadrate di lato $L = 30 \text{ cm}$ e distanti $d = 2 \text{ mm}$ è riempito per metà di mica ($\epsilon_{rm} = 5$). Il condensatore è collegato esternamente ad un generatore di f.e.m che mantiene una differenza di potenziale costante tra la armature di $\Delta V_g = 500 \text{ V}$. Successivamente la parte in aria viene completamente riempita di paraffina ($\epsilon_{rp} = 2$). Determinare:

- la variazione della quantità di carica Δq erogata dal generatore tra la condizione iniziale e quella finale;
- la variazione di energia elettrostatica immagazzinata tra la condizione iniziale e la condizione finale.

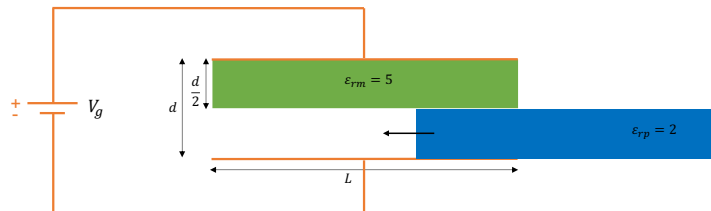


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a) La capacità totale del condensatore riempito per metà di aria e per metà di mica è pari alla capacità di due condensatori in serie. Indicando con C_a la capacità del condensatore in aria e con C_m la capacità del condensatore in mica si ha che la capacità totale iniziale è

$$C_i = \frac{C_a C_m}{C_a + C_m} \cong 0.664 \text{ nF} \quad (12)$$

dove

$$C_a = \frac{2\epsilon_0 L^2}{d} \cong 0.797 \text{ nF} \quad (13)$$

$$C_m = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_{rm} L^2}{d} \cong 3.98 \text{ nF} \quad (14)$$

La carica iniziale Q_i presente sulle armature del condensatore è data da:

$$Q_i = C_i V_g \cong 0.332 \text{ } \mu\text{C} \quad (15)$$

Analogamente, indicando con C_p la capacità del condensatore in paraffina e con C_m la capacità del condensatore in mica si ha che la capacità totale finale è

$$C_f = \frac{C_p C_m}{C_p + C_m} \cong 1.138 \text{ nF} \quad (16)$$

dove

$$C_p = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_{rp} L^2}{d} \cong 1.59 \text{ nF} \quad (17)$$

La carica finale Q_f presente sulle armature del condensatore è data da:

$$Q_f = C_f V_g \cong 0.569 \text{ } \mu\text{C} \quad (18)$$

La variazione della quantità di carica erogata dal generatore è

$$\Delta q = Q_f - Q_i \cong 0.237 \text{ } \mu\text{C} \quad (19)$$

b) La variazione di energia elettrostatica immagazzinata è:

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_f V_g^2 - \frac{1}{2} C_i V_g^2 = \frac{1}{2} (C_f - C_i) V_g^2 \cong 5.929 \cdot 10^{-5} \text{ J} \quad (20)$$

Problema 3 (8 punti) Un filo rettilineo infinito, coincidente con l'asse y di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, è percorso da corrente stazionaria $\underline{I}_1 = -I_1 \hat{y}$. Una bobina quadrata di lato L complanare con il filo e formata da N spire compatte di conduttore ideale è posizionata con il lato più vicino al filo a distanza x dal filo stesso. Le spire della bobina quadrata sono percorse da una corrente stazionaria I_2 in senso orario, come in Fig. 3. Determinare:

- l'espressione vettoriale della forza totale che agisce sulla bobina;
- il lavoro W fatto dalla forza totale risultante per spostare la bobina di $d = 0.3 \text{ m}$ nella direzione $\hat{x}$ se la posizione iniziale del tratto AB è $x_1 = 0.1 \text{ m}$, $I_2 = 2.163 \text{ A}$, $I_1 = 100 \text{ A}$, $N = 20$, $L = 0.5 \text{ m}$.

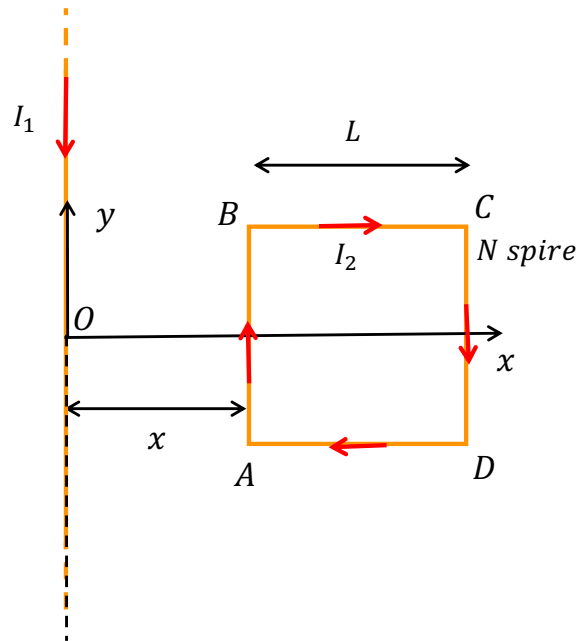


Figura 3: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

a)

L'asse $\hat{z}$ del sistema di riferimento cartesiano è uscente nel foglio. Il vettore induzione magnetica generato dal filo rettilineo percorso da corrente $I(t)$ in un punto di osservazione $P = (x, y)$ a distanza x dall'asse $\hat{y}$ è:

$$\underline{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(t)}{x} \hat{z}. \quad (21)$$

La forza magnetica elementare agente su un tratto elementare $d\underline{l}(r')$ di filo percorso da corrente I_s è .

$$d\underline{F}(r') = I_s d\underline{l}(r') \times \underline{B}(r') \quad (22)$$

Sui tratti $\underline{BC}$ e $\underline{DA}$ il campo magnetico non è costante per cui la forza totale agente sui singoli tratti dovrebbe essere ottenuta integrando lungo il cammino la (22). D'altra parte, per ragioni di simmetria, sempre utilizzando la (22) è facile dimostrare che la somma delle due forze elementari agenti sui due tratti $d\underline{l}(r')$ simmetrici rispetto all'asse y , posti sui lati $\underline{BC}$ e $\underline{DA}$ e dovute al campo magnetico generato da un singolo filo rettilineo è nulla (stesso modulo e direzioni opposte). Ne consegue che gli unici tratti che contribuiscono alla risultante sono i tratti $\underline{AB}$ e $\underline{CD}$. Su questi tratti il campo magnetico generato dai due fili è uniforme perchè tutti i punti si trovano alla stessa distanza dal filo rettilineo. La forza di

Lorentz magnetica agente su questi tratti può essere scritta come:

$$\underline{F}_{AB} = N I_2 L \hat{y} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 N L}{2\pi x} \hat{x} \quad (23)$$

$$\underline{F}_{CD} = N I_2 L (-\hat{y}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+L)} \hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 N L}{2\pi(x+L)} (-\hat{x}) \quad (24)$$

La risultante delle forze è

$$\underline{R} = \underline{F}_{AB} + \underline{F}_{CD} \quad (25)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 N L \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+L)} \right] \hat{x} \quad (26)$$

b)

Il lavoro elementare dW fatto dalla risultante $\underline{R}$ per spostare la bobina di un tratto infinitesimo orientato $d\hat{l} = dx \hat{x}$ è:

$$dW = \underline{R} \cdot dx \hat{x} = R dx = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 N L \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+L)} \right] dx \quad (27)$$

Il lavoro totale fatto dalla risultante per spostare la bobina di un tratto d può essere calcolato integrando il lavoro elementare da x_1 ad $x_1 + d$:

$$W = \int_{x_1}^{(x_1+d)} \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 N L \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+L)} \right] dx \quad (28)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 N L \int_{x_1}^{(x_1+d)} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+L)} \right] dx \quad (29)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 N L \left[\ln(x) \Big|_{x_1}^{(x_1+d)} - \ln(x+L) \Big|_{x_1}^{(x_1+d)} \right] \quad (30)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 N L \ln \left[\frac{(x_1+d)}{x_1} \frac{(x_1+L)}{(x_1+d+L)} \right] \quad (31)$$

Sostituendo i valori si ottiene $W \cong 6 \cdot 10^{-4} J$:

Problema 4 (8 punti) Una sbarra conduttrice rigida si appoggia su due binari conduttori rettilinei disposti a 60° l'uno dall'altro in modo simmetrico rispetto all'asse x , come mostrato in figura 4, fino ad una distanza a dall'origine. Successivamente i due binari conduttori diventano rettilinei e paralleli all'asse x . La sbarra, partendo dall'origine del sistema di riferimento, viene fatta muovere con velocità costante $\underline{v}_0 = v_0 \hat{x}$ rimanendo sempre perpendicolare all'asse x . Tutto il sistema è immerso in un campo di magnetostatico uniforme di induzione magnetica $\underline{B} = B_0 \hat{z}$ uscente dal foglio.

- Calcolare l'espressione dell'ampiezza della f.e.m. indotta al variare del tempo t .
- Determinare, al variare del tempo t , modulo, direzione e verso della forza che deve essere esercitata sulla sbarra in modo tale che possa essere mantenuta in moto rettilineo uniforme, supponendo che la resistenza elettrica $R = 10 \, \Omega$ della spira sia concentrata solo sulla sbarra e sia costante al variare del tempo t . Si supponga $a = 0.8 \, m$, $v_0 = 2 \, \frac{m}{sec}$ e $B_0 = 0.968 \, T$.

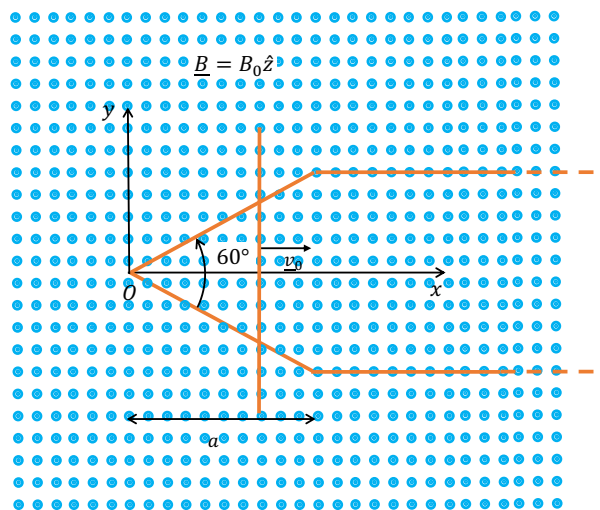


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 4

a)

La posizione della sbarra $x(t)$ rispetto all'asse x durante il moto è data dalla legge

$$x(t) = v_0 t \quad (32)$$

All'istante generico $0 < t \leq \frac{a}{v_0}$, l'altezza della sbarra tra i due binari inclinati, corrispondente alla base $b(t)$ del triangolo equilatero di altezza $x(t)$ è

$$b(t) = 2x(t) \tan 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}x(t) \quad (33)$$

mentre per $t > t_1$ l'altezza $b(t)$ della sbarra rimane costante e pari a:

$$b(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}a \quad (34)$$

L'area all'istante generico $0 < t \leq \frac{a}{v_0}$ risulta quindi:

$$A(t) = \frac{x(t) \cdot b(t)}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x^2(t) \quad (35)$$

Dall'istante di tempo $t_1 = \frac{a}{v_0}$ in poi, i binari diventano rettilinei per cui l'area totale A_1 all'istante di tempo t_1 è

$$A_1 = A \left(\frac{a}{v_0} \right) = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \quad (36)$$

L'area totale per $t > t_1$ cresce in funzione del tempo secondo la relazione

$$A(t) = \frac{a^2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} a [x(t) - a] \quad (37)$$

Essendo il campo di induzione magnetica costante e perpendicolare al piano della spira, il flusso totale all'istante t è quindi:

$$\Phi(t) = B_0 A(t) = \begin{cases} \frac{B_0 v_0^2}{\sqrt{3}} t^2 & 0 < t \leq \frac{a}{v_0} \\ \frac{B_0 a^2}{\sqrt{3}} + \frac{2B_0 a}{\sqrt{3}} [v_0 t - a] & \frac{a}{v_0} < t \end{cases} \quad (38)$$

L'ampiezza della f.e.m indotta all'istante t è:

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = \begin{cases} \frac{2B_0 v_0^2}{\sqrt{3}} t & 0 < t \leq \frac{a}{v_0} \\ \frac{2B_0 a v_0}{\sqrt{3}} & \frac{a}{v_0} < t \end{cases} \quad (39)$$

b)

Poiché il flusso aumenta sia per $0 < t \leq \frac{a}{v_0}$ che per $\frac{a}{v_0} < t$, la corrente indotta $I_i(t)$ nella spira dalla forza elettromotrice circolerà in senso *orario* e la sua ampiezza sarà:

$$I_i(t) = \frac{|\mathcal{E}_i(t)|}{R} = \begin{cases} \frac{2B_0 v_0^2}{R\sqrt{3}} t & 0 < t \leq \frac{a}{v_0} \\ \frac{2B_0 a v_0}{R\sqrt{3}} & \frac{a}{v_0} < t \end{cases} \quad (40)$$

La forza magnetica che agisce sulla sbarra al tempo t è data quindi da

$$\underline{F}(t) = I_i(t) b(t) (-\hat{y}) \times (B_0 \hat{z}) = I_i(t) b(t) B_0 (-\hat{x}) \quad (41)$$

da cui, utilizzando le espressioni (33), (34) e (40)

$$\underline{F}(t) = \begin{cases} -\frac{4B_0^2 v_0^3 t^2}{3R} \hat{x} & 0 < t \leq \frac{a}{v_0} \\ -\frac{4B_0^2 a^2 v_0}{3R} \hat{x} & \frac{a}{v_0} < t \end{cases} \quad (42)$$

La forza meccanica $\underline{F}_M(t)$ che deve essere esercitata sulla sbarra è opposta alla forza magnetica, per cui sostituendo i valori:

$$\underline{F}_M(t) \cong \begin{cases} t^2 \hat{x} \text{ N} & 0 < t \leq \frac{a}{v_0} \\ 0.8 \hat{x} \text{ N} & \frac{a}{v_0} < t \end{cases} \quad (43)$$