

Prova Scritta

Fisica Generale II (AA. 2020-2021)

2 Novembre 2021.

Problema 1 (8 punti) Quattro cariche puntiformi sono posizionate ai vertici $ABCD$ di un quadrato di lato $2L = 0.2 \text{ m}$ giacente sul piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Il centro del quadrato coincide con l'origine del sistema di riferimento (vedi figura 1). I valori delle quattro cariche sono rispettivamente $Q_A = Q_B = Q_C = Q$ e $Q_D = 2Q$ con $Q = 2 \text{ nC}$.

- Calcolare il lavoro necessario per spostare la carica posta in $A = (-L, -L, 0)$ dalla sua posizione iniziale fino al punto $M = (L, 0, 0)$ percorrendo la traiettoria c .
- Determinare la forza elettrostatica che agisce sulla carica Q nella sua posizione finale M .

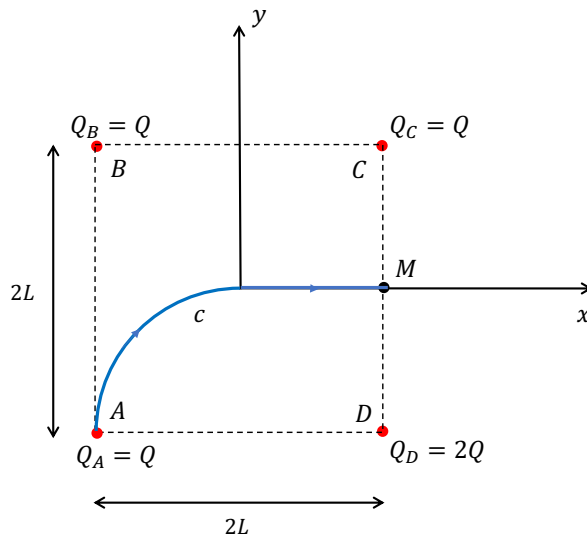


Figura 1: Geometria del problema 1

Soluzione del problema 1

a)

Il lavoro fatto contro le forze del campo non dipende dal cammino percorso ma solo dalla differenza di potenziale tra il punto A e il punto M in presenza delle tre cariche B, C e D . Il potenziale V_A in A è dato da :

$$V_A = k_e Q \left\{ \frac{1}{2L} + \frac{1}{2\sqrt{2}L} + \frac{2}{2L} \right\} = \frac{k_e Q}{2L} \left\{ 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cong 333.2 \text{ V} \quad (1)$$

dove $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Il potenziale V_M in M è dato da:

$$V_M = k_e Q \left\{ \frac{1}{L} + \frac{1}{\sqrt{5}L} + \frac{2}{L} \right\} = \frac{k_e Q}{2L} \left\{ 6 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \cong 619.65 \text{ V} \quad (2)$$

La differenza di potenziale è:

$$\Delta V = V_M - V_A = k_e Q = \frac{k_e Q}{2L} \left\{ 6 + \frac{2}{\sqrt{5}} - 3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{k_e Q}{2L} \left\{ 3 + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cong 286.46 \text{ V} \quad (3)$$

Il lavoro W è:

$$W = Q\Delta V = \frac{k_e Q^2}{2L} \left\{ 3 + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \cong 57.29 \text{ nJ} \quad (4)$$

b)

Il campo elettrostatico generato in M dalle cariche poste in A , B e D è

$$\underline{E}(L, 0, 0) = k_e \left\{ \frac{Q}{5\sqrt{5}L^3} (2L\hat{x} - L\hat{y}) + \frac{Q}{L^3} (-L\hat{y}) + \frac{2Q}{L^3} L\hat{y} \right\} \quad (5)$$

$$= k_e \left\{ \frac{Q}{5\sqrt{5}L^2} (2\hat{x} - \hat{y}) + \frac{Q}{L^2} \hat{y} \right\} \quad (6)$$

$$= k_e \frac{Q}{5\sqrt{5}L^2} \left\{ 2\hat{x} + (5\sqrt{5} - 1)\hat{y} \right\} \cong 321.55\hat{x} + 1636.8\hat{y} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (7)$$

La forza agente sulla carica posta in M è

$$\underline{F}(L, 0, 0) = Q\underline{E}(L, 0, 0) = k_e \frac{Q^2}{5\sqrt{5}L^2} \left\{ 2\hat{x} + (5\sqrt{5} - 1)\hat{y} \right\} \cong (0.643\hat{x} + 3.27\hat{y}) \mu\text{N} \quad (8)$$

Problema 2 (8 punti) Un condensatore sferico, ideale, in aria è costituito da un'armatura metallica interna di raggio R_1 e da un'armatura metallica esterna, concentrica a quella interna, di raggio R_2 . Il condensatore viene caricato fino a che sulle armature non si stabilisce una differenza di potenziale ΔV_0 e quindi isolato. Successivamente l'intercapedine tra le armature metalliche viene parzialmente riempita da un guscio sferico di materiale dielettrico, omogeneo, isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r di raggio interno a e raggio esterno R_2 (vedi figura 2).

- Determinare l'espressione del rapporto $\Delta V_N / \Delta V_0$ tra la differenza di potenziale ΔV_N tra le armature del condensatore dopo l'introduzione del dielettrico, e la differenza di potenziale iniziale ΔV_0 .
- Calcolare il valore delle cariche *totali* di polarizzazione localizzata sulla superficie interna di raggio a del dielettrico nell'ipotesi che $\epsilon_r = 4$, $R_1 = 1 \text{ cm}$, $R_2 = 3R_1$, $a = 2R_1$ e che $\Delta V_0 = 319.57 \text{ kV}$.

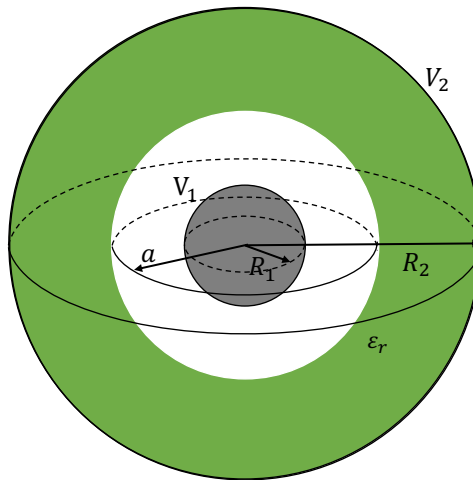


Figura 2: Geometria del problema 2

Soluzione del problema 2

a)

La capacità del condensatore sferico in aria è:

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \text{ F} \quad (9)$$

La carica iniziale Q sulle armature del condensatore piano può essere calcolata ricordando che $Q = C\Delta V$ per cui

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Delta V_0 \text{ C} \quad (10)$$

Un volta introdotta la struttura la carica rimane invariata perché il condensatore viene isolato. La nuova differenza di potenziale che si stabilisce tra le armature dipende dalla capacità del condensatore dopo l'introduzione della struttura. In questo caso il condensatore può essere visto come la serie di due condensatori sferici (vedi figura 3). Le capacità dei singoli condensatori sono

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 a}{a - R_1} \text{ F} \quad (11)$$

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \frac{a R_2}{R_2 - a} \text{ F} \quad (12)$$

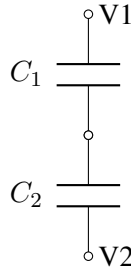


Figura 3: Circuito equivalente del problema 2

La capacità totale di due condensatori in serie è l'inverso della somma degli inversi per cui si ha:

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r a R_1 R_2}{R_1 R_2(1 - \epsilon_r) + a(\epsilon_r R_2 - R_1)} \text{ F} \quad (13)$$

La differenza di potenziale ΔV_N nella nuova configurazione è

$$\Delta V_N = \frac{Q}{C_T} = \frac{C_0}{C_T} \Delta V_0 \text{ V} \quad (14)$$

quindi:

$$\frac{\Delta V_N}{\Delta V_0} = \frac{C_0}{C_T} = \frac{R_1 R_2(1 - \epsilon_r) + a(\epsilon_r R_2 - R_1)}{\epsilon_r a(R_2 - R_1)} \quad (15)$$

b)

Data la simmetria sferica del problema, applicando il teorema di Gauss in presenza di dielettrici ad una superficie sferica di raggio $a < r < R_2$ si ottiene:

$$D_r(r) 4\pi r^2 = Q \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (16)$$

dove la carica totale Q è $Q = C_0 \Delta V_0$ e C_0 è dato dall'espressione in (9).

Il vettore induzione elettrica nel dielettrico risulta:

$$\underline{D}(r) = \frac{C_0 \Delta V_0}{4\pi r^2} \hat{r} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (17)$$

essendo r la distanza dal centro del sistema e $\hat{r}$ un versore diretto radialmente al centro. Per un dielettrico omogeneo, isotropo, lineare si ha in tutti i punti interni al dielettrico $\underline{D}(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}(r)$ Quindi il campo elettrico all'interno del dielettrico risulta essere:

$$\underline{E}(r) = \frac{C_0 \Delta V_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (18)$$

Il vettore di polarizzazione $\underline{P}(r)$ in un punto interno al dielettrico è $\underline{P}_r(r) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\underline{E}_r(r)$ per cui:

$$\underline{P}_r(r) = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{C_0 \Delta V_0}{4\pi r^2} \hat{r} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (19)$$

La densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie esterna può essere calcolata ricordando che:

$$\sigma_p = \underline{P}(r) \cdot \hat{n}|_{r \in S} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (20)$$

per cui sulla superficie esterna di raggio $r = a$ si ha:

$$\sigma_p = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{C_0 \Delta V_0}{4\pi r^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) \Big|_{r=a} \quad (21)$$

$$= - \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{C_0 \Delta V_0}{4\pi a^2} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (22)$$

Poiché la carica è distribuita uniformemente, la carica totale di polarizzazione presente sulla superficie interna del guscio dielettrico è

$$Q_p = \sigma_p 4\pi a^2 = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} C_0 \Delta V_0 = -\frac{3}{4} C_0 \Delta V_0 \quad (23)$$

Con i dati del problema:

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{3}{2} R_1 \cong 1.66 \text{ pF} \quad (24)$$

$$Q_p = -\pi\epsilon_0 \frac{9}{2} R_1 300 \cong -0.4 \text{ } \mu\text{C} \quad (25)$$

Problema 3 (8 punti) Due bobine di Helmholtz sono costituite da due spire circolari di raggio $R = 50a$, disposte nello spazio parallele tra loro e con i centri ad una distanza pari ad R . Le due spira sono percorse nello stesso verso da una corrente I_s orientata come in figura. Una piccola spira circolare, parallela alle prime due, di raggio a giace con il centro posto sull'asse che congiunge i centri delle due bobine di Helmholtz ad una distanza d da una delle due spire. La piccola spira ed è inclinata in modo tale che la normale al piano della piccola spira formi un angolo di $\alpha = 30^\circ$ con l'asse congiungente i centri delle bobine di Helmholtz, come in figura. Nell'ipotesi che il campo di induzione magnetica prodotto dalle bobine di Helmholtz sia costante su tutto il piano della spira di raggio a determinare:

- l'espressione in funzione di R del vettore di induzione magnetica al centro della piccola spira quando questa si trova a distanza $d = \frac{R}{3}$ da una delle due spire;
- il valore della corrente I_s in modo tale che il flusso totale Φ_1 del campo di induzione magnetica attraverso la piccola spira nella posizione $d = \frac{R}{2}$ sia $\Phi_1 = 19.58 \text{ nWb}$, nell'ipotesi che $a = 1 \text{ cm}$;

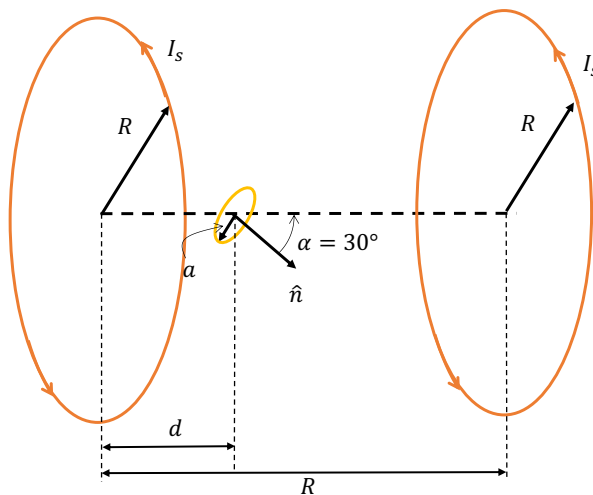


Figura 4: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 3

a)

Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con il piano $x - y$ coincidente con la spira 1, il campo di induzione magnetica generato dalla spira 1 sull'asse a distanza z è ricavabile dalla seconda legge di Laplace ed è dato da:

$$\underline{B}_1(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_s R^2}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (26)$$

Il campo totale generato dalla spira 2 percorsa dalla stessa corrente, orientata nello stesso verso e nel solito punto z è:

$$\underline{B}_2(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_s R^2}{[R^2 + (R - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (27)$$

Il campo magnetico totale è:

$$\underline{B}(z) = \underline{B}_1(z) + \underline{B}_2(z) = \frac{\mu_0}{2} I_s R^2 \left\{ \frac{1}{[R^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[R^2 + (R - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (28)$$

Nel punto $z = \frac{R}{3}$ si ha:

$$\underline{B}\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\mu_0}{2} I_s R^2 \left\{ \frac{1}{[R^2 + \frac{R^2}{9}]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[R^2 + (R - \frac{R^2}{9})^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \hat{z} \quad (29)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} I_s R^2 \left\{ \frac{3^3}{R^3 [10]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3^3}{R^3 [13]^{\frac{3}{2}}} \right\} \hat{z} \quad (30)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} I_s \frac{3^3}{R} \left\{ \frac{1}{10\sqrt{10}} + \frac{1}{13\sqrt{13}} \right\} \hat{z} \cong \frac{\mu_0}{2} \frac{I_s}{R} 1.43 \hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (31)$$

b)

Nel punto $z = \frac{R}{2}$ il campo magnetico totale è:

$$\underline{B}\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2} I_s R^2 \left\{ \frac{1}{[R^2 + \frac{R^2}{4}]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[R^2 + \frac{R^2}{4}]^{\frac{3}{2}}} \right\} \hat{z} \quad (32)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} I_s R^2 \left[\frac{2^4}{R^3 (5)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{z} \quad (33)$$

$$= \mu_0 I_s \frac{8}{5\sqrt{5}R} \hat{z} \cong \frac{\mu_0}{2} \frac{I_s}{R} 1.43 \hat{z} \quad \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (34)$$

Il flusso risulta quindi:

$$\Phi_1 = \mu_0 I_s \frac{8}{5\sqrt{5}R} (\pi a^2) \cos 30^\circ \quad (35)$$

$$= \mu_0 I_s \frac{8}{5\sqrt{5}R} (\pi a^2) \frac{\sqrt{3}}{2} = (12.4 \cdot 10^{-3}) \mu_0 \pi I_s a \quad \text{Wb} \quad (36)$$

La corrente risulta quindi:

$$I_s = \frac{\Phi_1 10^3}{12.4 \mu_0 \pi a} = \frac{\Phi_1 10^3}{12.4 \mu_0 \pi 10^{-2}} = \frac{\Phi_1 10^{-2}}{12.4 \cdot 4\pi^2} \cong 40 \quad \text{A} \quad (37)$$

Problema 4 (8 punti) Due sbarrette conduttrici rigide, ciascuna di resistenza R , si appoggiano su due binari conduttori rettilinei paralleli di resistenza trascurabile, posti sul piano $x - y$ di un sistema di riferimento cartesiano a distanza $L = 0.5$ m, come mostrato figura 5. Il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica costante $\underline{B} = 1\hat{z}$ T. Le due sbarrette sono vincolate a muoversi parallelamente a se stesse con velocità costante $\underline{v}_1 = 16\hat{x}$ m/s e $\underline{v}_2 = \frac{v_1}{2}$. Determinare:

- la resistenza di ciascuna sbarretta se la corrente indotta nel circuito è $I_i = 2$ A;
- i vettori delle forze di natura magnetica che agiscono sulle due sbarrette.

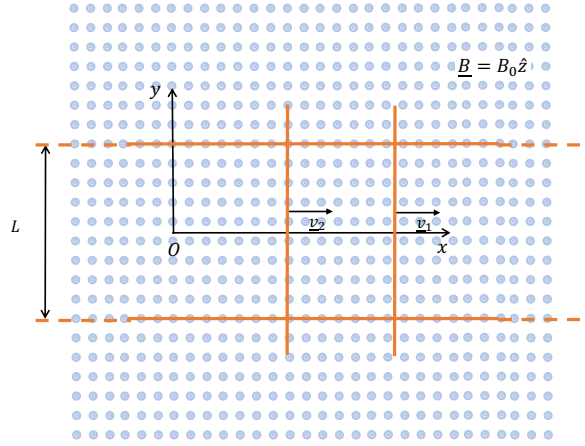


Figura 5: Geometria del problema 3

Soluzione del problema 4

a)

La distanza relativa tra le due sbarrette al tempo t durante il moto è :

$$d(t) = |v_1 - v_2|t = \left| \frac{v_1}{2} \right| t \quad \text{m} \quad (38)$$

Essendo il campo di induzione magnetica costante e perpendicolare al piano della spira, il flusso totale all'istante t è quindi:

$$\Phi(t) = B_0 L d(t) = B_0 L \left| \frac{v_1}{2} \right| t \quad \text{Wb} \quad (39)$$

Conseguentemente l'ampiezza della forza elettromotrice indotta nel circuito sarà:

$$|\mathcal{E}_i(t)| = \left| -\frac{d\Phi(t)}{dt} \right| = B_0 L \left| \frac{v_1}{2} \right| = |\mathcal{E}_i| \cong 4 \quad \text{V} \quad (40)$$

La tensione indotta è costante nel tempo.

Il flusso aumenta nel tempo per cui la corrente costante indotta I_i nella spira dalla forza elettromotrice circolerà in senso *orario* e la sua ampiezza sarà:

$$I_i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{2R} = \frac{B_0 L \left| \frac{v_1}{2} \right|}{2R} \cong 2 \quad \text{A} \quad (41)$$

La resistenza di ogni sbarretta si può calcolare come:

$$R = \frac{|\mathcal{E}_i(t)|}{2I_i} = \frac{B_0 L \left| \frac{v_1}{2} \right|}{2I_i} \cong 1 \quad \Omega \quad (42)$$

b)

La forza magnetica che agisce sulle sbarrette percorse da corrente costante è data da

$$\underline{F}_1 = I_i L (-\hat{y}) \times (B_0 \hat{z}) = \frac{B_0 L \left| \frac{v_1}{2} \right|}{2R} L B_0 (-\hat{x}) \text{ N} \quad (43)$$

$$\underline{F}_2 = I_i L \hat{y} \times (B_0 \hat{z}) = \frac{B_0 L \left| \frac{v_1}{2} \right|}{2R} L B_0 \hat{x} \text{ N} \quad (44)$$

da cui, sostituendo i valori numerici:

$$\underline{F}_1 = -\frac{B_0^2 L^2}{2R} \left| \frac{v_1}{2} \right| \hat{x} \cong -1 \hat{x} \text{ N} \quad (45)$$

$$\underline{F}_2 = \frac{B_0^2 L^2}{2R} \left| \frac{v_1}{2} \right| \hat{x} \cong 1 \hat{x} \text{ N} \quad (46)$$