

LEGGE DI COULOMB

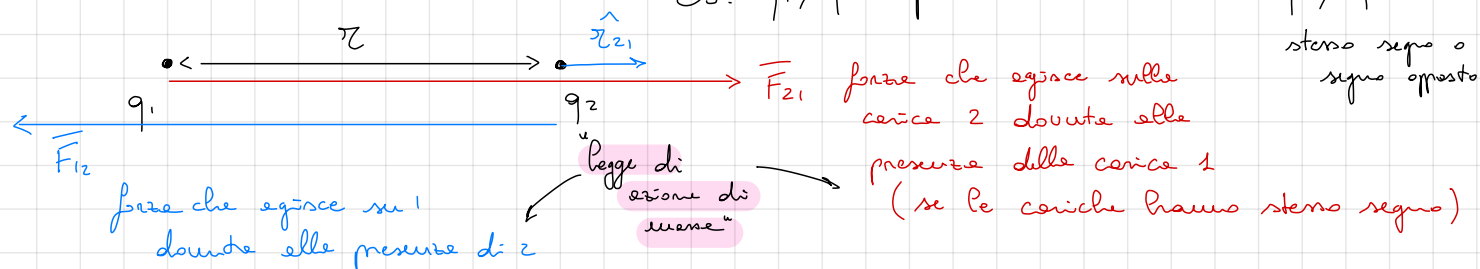
- Forze che agiscono a distanza (senza contatto)
- Cariche opposte si attraggono e viceversa

CARICA ELEMENTARE NEL VUOTO

punti-forme = dim. << dist. tra le cariche

Es. q_1, q_2 quantità di carica

$q_1 \neq q_2$



$\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ per Principio di sovrapposizione degli effetti

$$F_{21} = |\vec{F}_{21}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \text{Def. LEGGE DI COULOMB}$$

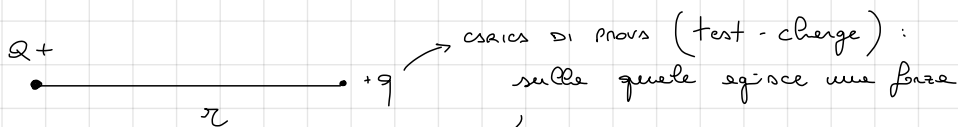
senza segno è intensità

distanze nel vuoto (isolate)

(vale p.s.e.)

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \rightarrow \text{per il p.s.e.}$$

CAMPO ELETTRICO



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{CAMPO ELETTRICO (STATICO)} \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$ "effetti che test-charge non perturba le perturbazioni nello spazio data dalla carica maggiore Q si vuole $q \rightarrow 0$ "

$$\vec{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$\propto$ distanza, e può essere visto come linee di forza per intensità e direzione

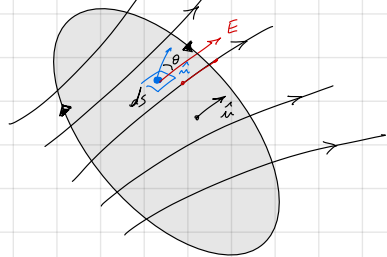
$$\Rightarrow \vec{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \text{per p.s.e.}$$

FLUSSO CAMPO ELETTRICO

Definisco una superficie con un campo elettrico:

"Il campo elettrico è tangente in ogni punto"

prendo un punto con normale $\hat{u}$ e questo punto è una piccola area in cui c'è campo elettrico



Definisco un flusso elementare:

$$d\phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in S} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{u} dS$$

"quantità di linee di forza sulla superficie"

$\Rightarrow |\vec{E}| \sin \theta dS$, massima quando sono //

$$\Rightarrow \phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{u} dS, \text{ non dipende più dalla posizione}$$

$\left[\frac{N}{C} \cdot m^2 \right]$

NOTA:

ϵ_0 : costante dielettrica

μ_0 : permeabilità dielettrica

TEOREMA DI GAUSS



Il flusso attraverso una superficie chiusa del campo elettrico è indipendente dalla forma della superficie chiusa e dalla posizione della sorgente Q e al posto della carica Q posso mettere la carica totale racchiusa nella superficie per il principio di sovrapposizione degli effetti

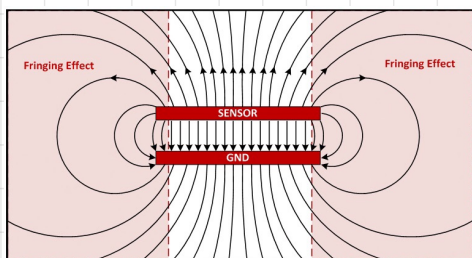
$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{u} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

NOTA:

• non dipende da posizione sorgente Q

• non dipende dalla forma della superficie

Def. FRINGING EFFECT, effetto al bordo: - aumento delle capacità tra le due piastre



- flusso al centro diverso dal flusso verso i bordi

Deriva direttamente dalle leggi di Maxwell

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

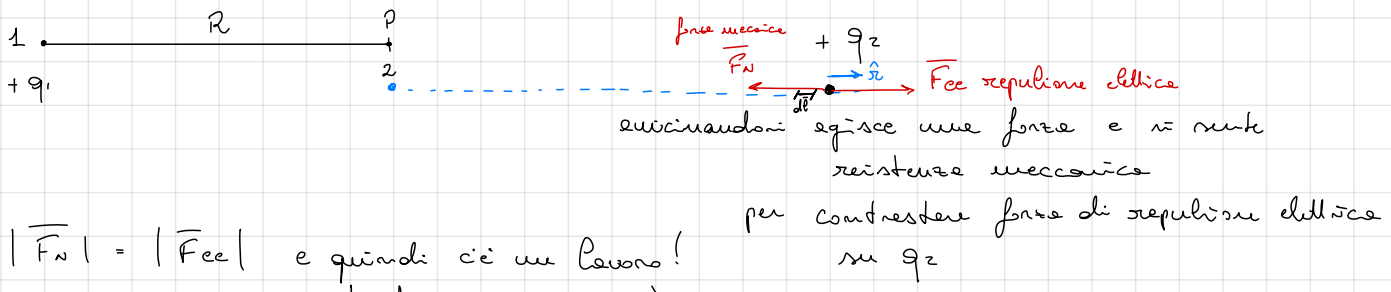
$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dv = \oiint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{u} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z) dv$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

"operatore simbolico con funzione vettore a 3 componenti"

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

$\vec{r}$



$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_{ce}|$ e quindi c'è un lavoro!
 si trasforma in

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

$$dL_N = \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = |\vec{F}_m| dl$$

$$U = L_N = \int_{\infty}^R \vec{F}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^R -\vec{F}_{ce} \cdot d\vec{l} = \int_R^{\infty} \vec{F}_{ce} \cdot d\vec{l}$$

"lavoro che la forza di repulsione elettrica fa dal punto all'infinito"

$$\vec{F}_{ce} = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \leftarrow \text{ricordando}$$

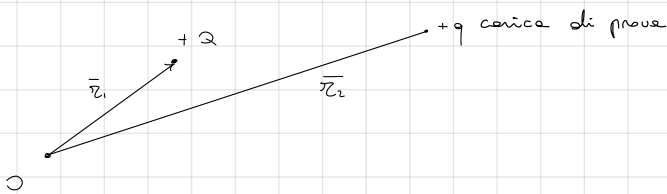
$$U = \int_R^{\infty} K_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{K_e q_1 q_2}{R} [J]$$

"lavoro compiuto per portare quella carica da ∞ a P a distanza R"
 se > 0 è lavoro compiuto contro la forza repulsiva

$$\Rightarrow U_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} [J]$$

ESPRESSIONE GENERALE
 ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

POTENZIALE ELETTRICO



ricordando:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

"lavoro per portare q da ∞ fino a quel punto individuato da $\vec{r}_2$ "

però scriverlo come:

$$U = q \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right]$$

POTENZIALE ELETTRICO nel punto $\vec{r}_2$ $\left[\frac{J}{C} \right] \rightarrow$ funzione di $\vec{r}$ punto nello spazio $[V]$

$$\Rightarrow \frac{U}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = V_0(\vec{r}_2) \text{ "nel vuoto"}$$

NOTA: non dipende dalla carica di prova ed è solo funzione del punto di osservazione $\vec{r}_2$

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l}$$

"non necessita di conoscere dove e come sono le sorgenti, conta solo se sono finite o infinite"

"lavoro per portare una carica unitaria dall'infinito a quel punto"

$$V_B - V_A = \int_B^{\infty} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} - \int_A^{\infty} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{l}$$

* integrale curvilineo del campo elettrico su un cammino da A a B * [V]

NOTA:

- non dipende dal cammino scelto
- non dipende dalle forze del campo
- dipende solo dal potenziale nel punto

lavoro elementare

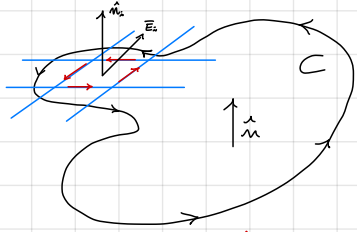
compiuto contro

forze del campo per spostare

una carica positiva unitaria nel piccolo tratto $d\vec{l}$
 $\Rightarrow$ lavoro esterno compiuto da noi contro le forze del campo

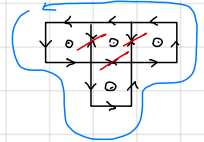
TEOREMA DI STOKES

Considero una regione dove c'è un campo elettrostatico $\forall$ punto di questa superficie aperta di bordo C



$\vec{E}(x, y, z)$ potrebbe essere conservativo o non conservativo ecc...

$\Rightarrow$ divido in ∞ piccole aree, ciascuna con una normale e per ogni area calcolo il flusso del vettore rotore



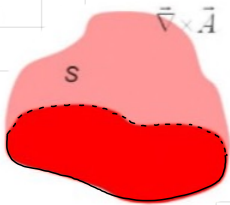
rimane solo la circolazione del r.m. (bordo)

$$\phi_i = \nabla \times \vec{E}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i ds_i$$

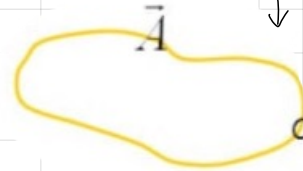
$\hat{n}$ - prima area
 "flusso elementare"

Teo. di Stokes

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E}(\vec{r}') \cdot \hat{n} ds = \oint_C \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{C}$$



"flusso delle rotazioni del campo attraverso una qualunque superficie che poggia su tale linea"



"circolazione campo vettoriale lungo un percorso chiuso"

ENERGIA POTENZIALE

ricorda:

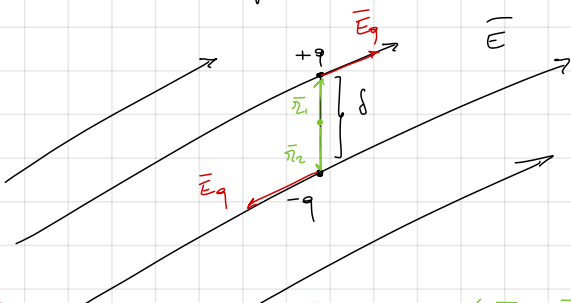
Il lavoro fatto per portare $-q$ in A

$$-q V(A) + q V(B) = U \text{ energia potenziale}$$

$$U = q (V(B) - V(A))$$

$$U = q \delta (-\vec{E}(x, y, z) \cdot \hat{\delta}) = -q \delta \hat{\delta} \cdot \vec{E}(x, y, z) = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

Supponiamo questo dipolo rigido e lo immergo in un campo elettrico uniforme



Def. MOMENTO MECCANICO

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$$

Coppie che fa ruotare il dipolo

uguale in ogni punto dello spazio

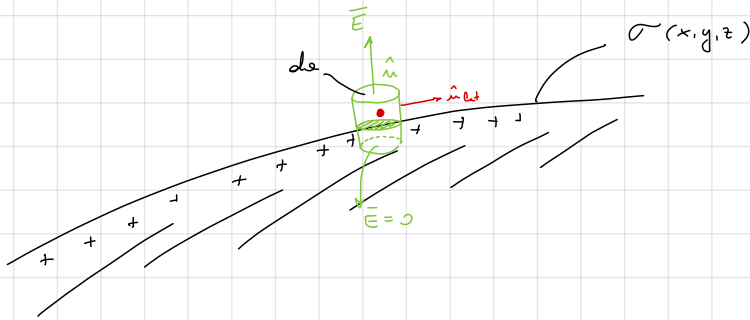
$$\vec{r}_1 \times \vec{E}_q - \vec{r}_2 \times \vec{E}_q = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{E}_q$$

$$= q (\underbrace{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}_{\vec{\delta}}) \times \vec{E} = q \vec{\delta} \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E} \text{ "momento meccanico"}$$

forze elettrostatiche uguali

NOTA: se il campo non fosse uniforme oltre al momento torcente
 vi sarebbe anche un momento
 traslatorio perché la risultante non
 è nulla $\Rightarrow \vec{F} = \nabla(\vec{E} \cdot \vec{p})$

TEOREMA DI COULOMB

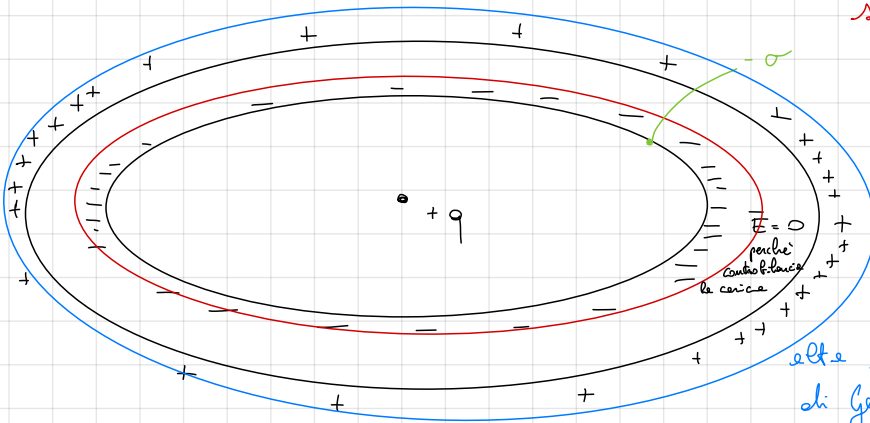


$\vec{E} \cdot \hat{n}_{\text{lat}} = 0$ altrimenti ci sarebbe spostamento di carica e non sarebbero più valide le ipotesi di conduttore in equilibrio elettrostatico.

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{Tco. di Coulomb:}$$

appena sopra la superficie equipotenziale di un conduttore carico con σ , il campo elettrico vale $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n}$

INDUZIONE COMPLETA



superficie di Gauss: flusso elettrico è nullo

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{maggiore sui raggi di curvatura minore}$$

$$\iint + \sigma(\vec{r}') dS = -q$$

Simil "La distrib. superf. della carica è t.c. sulla superficie interna si distribuisce una carica $-q$ "

alta sup. di Gauss $\iint \sigma(\vec{r}') dS = +q$

Se si La carica netta dentro la superf. di Gauss è una carica positiva $\Rightarrow$ il campo elettrico è come generato da una carica $+q$

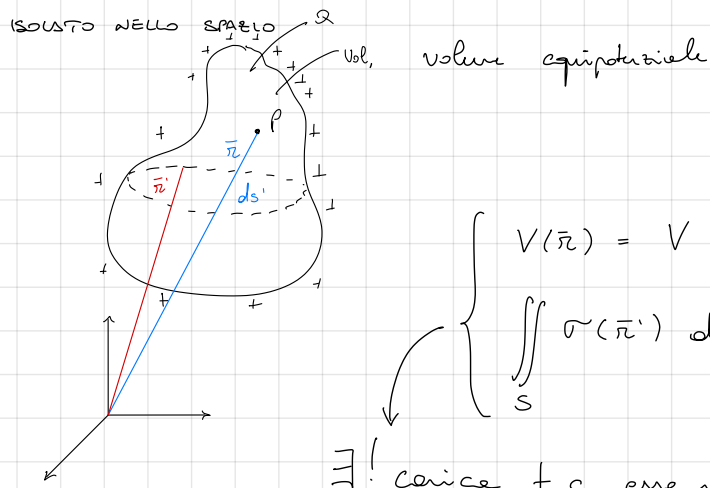
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}') \cdot \hat{n} dS = +q + \underbrace{\iint_{S_{\text{int}}} + \sigma(\vec{r}') dS}_{=0} = 0$$

carica netta
 ma essendo campo = 0

$$\iint_{S_{\text{int}}} \sigma(\vec{r}') dS = -q$$

- Questo effetto è detto CABBIA DI FARADAY, schematica elettrostatica. Se all'interno delle gabbie ho una o più cariche, ho un campo elettrico ma dall'esterno non riesco a modificarlo

CAPACITA' DI UN CONDUTTORE



$$dV = \frac{k_e \sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$V(P) = \iint_S \frac{k_e \sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\vec{r}) = V, \quad \forall \vec{r} \in \text{Volume} \\ \iint_S \sigma(\vec{r}') ds' = Q \end{array} \right.$$

$\exists!$ carica t.c. esse siano verificate insieme (no dim.)

Se aumentiamo
ore la carica:

$$Q \rightarrow \alpha Q \Rightarrow \sigma \rightarrow \alpha \sigma$$

$$\Rightarrow V_2(P) = \iint_S \frac{\alpha \sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \alpha V(P)$$

Il rapporto tra la quantità di carica posseduta da un conduttore isolato ed il potenziale a cui si trova il conduttore è una costante

$$\frac{Q}{V(P)} = \frac{\alpha Q}{\alpha V(P)} = C \quad \text{CAPACITA' DEL CONDUTTORE} \quad [F] = \left[\frac{C}{V} \right]$$

CONDENSATORE ELETTROSTATICO

Def: due conduttori **ISOLATI** adiacenti, **CARICATI** con cariche **UGUALI** SEGNO **OPPOSTO** t.c. subiscano la stessa **influenza** che parte di altri conduttori vicini.

CONDENSATORE SFERICO

dipende quindi delle sole distanze tra le armature $\Rightarrow$

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} [F]$$

CONDENSATORE CILINDRICO

$$C_{cil} = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)} [F]$$

CONDENSATORE PIANO

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{perché siano nel vuoto} [F]$$

$\updownarrow$
campo elettrico ideale: armature infinite

LAVORO ED ENERGIA circa condensatori

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i q_i$$

Se avremo 2 conduttori: $q_1, q_2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} [q_1 V_1 + q_2 V_2]$

Nel caso di un condensatore $q_1 = Q, q_2 = -Q \Rightarrow U = \frac{1}{2} V_1 Q - \frac{1}{2} V_2 Q$

energie potenziale
del C caricato $\Rightarrow$
che si trova
all'interno $= \frac{1}{2} Q [V_1 - V_2] =$
 $= \frac{1}{2} Q \Delta V$

ma sappiamo che $Q = C \Delta V$

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

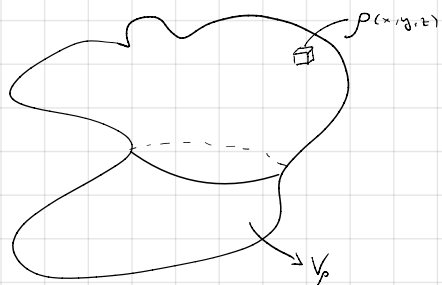
$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ricordando: $\Delta V = \frac{C}{V}$

DENSITA' DI ENERGIA ELETTROSTATICA

- Suppongo distribuzione volumetrica che genera campo elettrostatico (senza dimost.)

$\rho(\vec{r})$ $V(\vec{r})$ calcoliamo $\rho(x, y, z) \frac{C}{m^3}$ $V(x, y, z)$



$$U = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho(x, y, z) V(x, y, z) dv = \text{si dimostra ma non noi}$$

$$= \iiint_{V_{spazio}} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(x, y, z)|^2 dv =$$

RICORDA: l'energia elettrostatica associata ad una distribuzione di campo elettrostatico può essere ottenuta in termini di campo elettrostatico.

$$U = \iiint_{V_{spazio}} \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}(x, y, z)|^2 dv$$

$\Rightarrow$

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

Qui intendiamo
tutti i punti
dove $E \neq 0$

NOTA: "Quando carichiamo un condensatore, questo lavoro fatto lo ritrovo immagazzinato nel condensatore sotto forma di campo elettrostatico e a ciò è associata un'energia elettrostatica ed è il lavoro speso per caricare il condensatore."

Fine

Deformazione dell'atomo

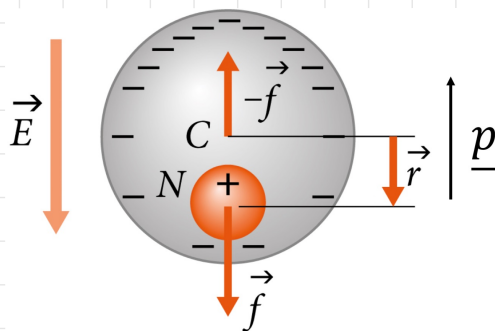
Una volta applicato un campo elettrico (statico) esterno locale, il nucleo subisce:

una forza $\vec{f} = z \vec{E}$, z numero atomico

ed il baricentro una forza $\vec{f} = -z \vec{E}$

$\Rightarrow$ deformazione della sfera elettronica, con forma finale ovoidale

π distanza finale baricentro del nucleo



$\Rightarrow$ Avremo quindi un momento di dipolo indotto

$$\vec{p} = z \pi = \alpha_d \vec{E}_l \neq 0$$

polarizzabilità elettronica
Es. $[\alpha_{He} \approx 0,12 \times 10^{-40} \text{ F} \cdot \text{m}^2]$

campo locale generato da tutte le sorgenti esterne nell'atomo (escluso campo dell'atomo stesso)

Questo fenomeno è detto POLARIZZAZIONE ELETTRICA (atomo nel campo elettrico che acquista momento di dipolo)

Le molecole sono poi divise in polari o non polari se posseggono o meno momento di dipolo proprio ma entrambe hanno momento di monopolo nullo e sono quindi sistemi elettricamente nulli

Le polari hanno momento di dipolo proprio ($\vec{p}_0 \approx 3,4 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$) anche in assenza di campo elettrico e GENERANO SINCORRENTE CAMPO ELETTROSTATICO ma non a livello microscopico

Contrastata però dall'agitazione termica, non tutte si allineano e alcune solo parzialmente. Si polarizza per orientamento quindi a differenza delle non polari che era per deformazione

In conclusione, se un dielettrico è sottoposto a campo elettrostatico, le sue molecole od atomi acquistano un momento di dipolo medio $\neq 0$ lungo $\vec{E}(\vec{r})$

$$\langle \vec{p}_{m,i} \rangle = \alpha \vec{E}_l, \quad \alpha = \alpha_d + \alpha_o \quad \text{polarizzabilità totale molecole}$$

$$\text{Def. VETTORE DI POLARIZZAZIONE} \quad \vec{P}(x,y,z) = \frac{\sum_{i=1}^N \langle \vec{p}_{m,i} \rangle}{\Delta V} \quad \left[\text{C/m}^2 \right]$$

(momento di dipolo per unità di volume)

NOTE: ΔV piccolo ma t.c. $\vec{P}$ sia uniforme all'interno e grande t.c. affinché la regola di volume del punto di osservazione

Per un dielettrico polarizzato $\vec{P}(x,y,z) \neq 0$ e questo significa che all'interno c'è una densità di cariche di polarizzazione volumetriche $\rho_p(x,y,z)$ e densità superficiali $\sigma_p(x,y,z)$ entrambe non nulle, le quali contribuiscono al potenziale ed al campo elettrico totale sia internamente che esternamente essendo esse cariche aggiuntive.

$$V(x, y, z) = K_e \iiint_V \frac{\bar{P}(x', y', z') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dV'$$

$$V(\bar{r}) = K_e \oint_S \underbrace{\bar{P}(\bar{r}') \cdot \hat{n}}_{\sigma_p} \frac{dS'}{|\bar{r} - \bar{r}'|} + K_e \iiint_V \underbrace{\left[-\nabla' \cdot \bar{P}(\bar{r}') \right]}_{\rho_p} \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

NOTA: se il vettore di polarizzazione è uniforme nel dielettrico si hanno solo cariche superficiali

$$\begin{aligned} \sigma_p(\bar{r}') &= P(\bar{r}') \cdot \hat{n} \quad C/m^2 \\ \rho_p(\bar{r}') &= -\nabla' \cdot \bar{P}(\bar{r}') \quad C/m^3 \end{aligned}$$

$$\text{NOTA: } \bar{D}(\bar{r}) = \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}) + \bar{P}(\bar{r})$$

$$\Rightarrow \bar{D}(\bar{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E}(\bar{r}) \quad \begin{array}{l} \text{"vettore spostamento elettrico"} \\ \text{"INDUZIONE ELETTRICA"} \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{P}(\bar{r}) = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E}(\bar{r}) \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ isotropo} \\ \bullet \text{ lineare} \\ \bullet \text{ omogeneo} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{"VETTORE POLARIZZAZIONE"} \\ \text{ELETTRICA"} \end{array} \end{array}$$

$$U = \iiint_{Vol} \frac{1}{2} \epsilon_0 \underline{E} \cdot \underline{E} dV \quad [J]$$

$$u(\bar{r}) = \frac{1}{2} \bar{D}(\bar{r}) \cdot \bar{E}(\bar{r}) \quad [J/m^3]$$

$$u = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r |\bar{E}|^2$$

Def. CORRENTE ELETTRICA: un flusso di cariche positive, verso positivo il verso di percorrenza cariche positive.

Def. INTENSITA' DI CORRENTE: $I = \frac{dQ}{dt}$ flusso netto di carica per unità di tempo

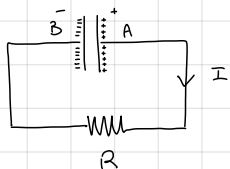
$$\Rightarrow I = |\bar{J}| S = \sigma |\bar{E}| S = \frac{\sigma S}{l} \Delta V$$

Def. LEGGE DI OHM
 $\Delta V = R \cdot I$

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma S} I = \underbrace{\rho \frac{l}{S}}_{R [\Omega]} I$$

Def. RESISTENZA ELETTRICA

1 Ω se @ $\Delta V = 1V$ ho 1A



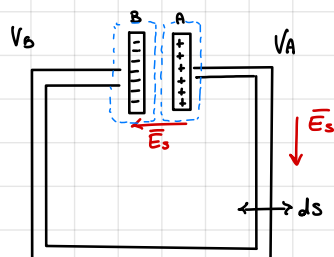
- Possesso di corrente implica possesso di energia che campo elettrostatico alla corrente
- Questa viene dissipata in calore o altre forme (chimica, ...)

Le macchine che permette di mantenere costante l'accumulo di carica positiva sulle regione A ed il difetto di carica positiva nella regione B

$\Rightarrow$ GENERATORE di forze elettromotrice

($V_A - V_B$ è mantenuto costante)

Circulazione campo elettrico $\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$ "circolazione lungo linee chiuse è nulla"
 $\Rightarrow$ non c'è lavoro!



$\vec{E}_s$ sempre diretto da A a B lungo un percorso del conduttore

Internamente al generatore le cariche positive devono subire un movimento da potenziale minore al maggiore, contro quindi il campo elettrostatico

$$V_A - V_B = \oint_{\text{"campo totale"}} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = (R + r) I, \quad r: \text{resistenza interna al generatore}$$

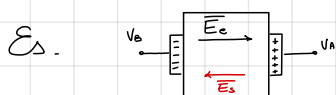
$\vec{E}_e$ campo ELETTROMOTORE, opposto al campo elettrostatico,
non conservativo che trasporta le cariche

$$\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_B^A (\vec{E}_s + \vec{E}_e) \cdot d\vec{l} \neq 0 \quad \text{ma dato che:}$$

$$\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \neq 0$$

$$\Rightarrow \int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \underset{\substack{\downarrow \\ \mathcal{E}}}{f.e.m.} \quad [V] = [J/C]$$

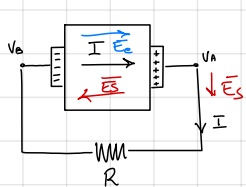
"Lavoro fatto dal campo elettromotore per spostare una carica + unitaria nel generatore da morsetto negativo a morsetto positivo"



Scegliendo i morsetti generatore ho equilibrio

$$\vec{E}_e = -\vec{E}_s \quad \text{e quindi stazionaria nel tempo}$$

$$\Rightarrow \int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \int_B^A -\vec{E}_s \cdot d\vec{l} = - \underbrace{\int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l}}_{\Delta V = V_A - V_B}$$



$$\underbrace{\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l}}_{RI} + \underbrace{\int_B^A (\vec{E}_s + \vec{E}_e) \cdot d\vec{l}}_{rI} = (R + r) I$$

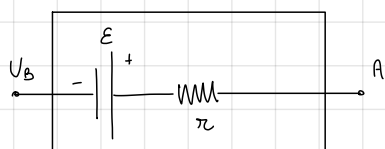
$$\underbrace{\int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l}}_0 + \underbrace{\int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l}}_0 + \underbrace{\int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l}}_E = (r + R) I$$

$$\begin{aligned} E &= rI + RI \\ &= rI + (V_A - V_B) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = E - rI}$$

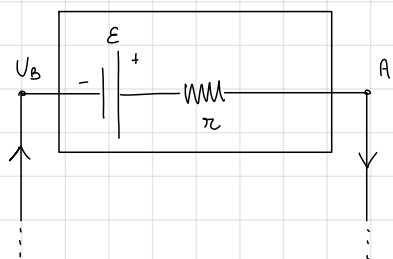
"Legge di Ohm generalizzata"

Ci sono due casi:



$$V_A - V_B = E$$

• Valido solo a circuito aperto



$$V_A - V_B = E - rI$$

Nota: convenzione

$$V_B - V_A + \sum_{i=1}^N E_i = \left[\sum_{j=1}^N (R_j) \right] I \quad \text{Legge di Ohm generalizzata}$$

Def. KIRCHHOFF AI NODI

La somma algebrica di tutte le correnti uscenti da un nodo è NULLA (in condizioni stazionarie) ai nodi

Def. II° LEGGE DI KIRCHHOFF

La somma algebrica delle cadute di potenziale in una maglia uguaglia la somma algebrica delle f.e.m. dei generatori

Def. GENERATORE DI f.e.m.

IDEALE: in grado di mantenere ai propri morsetti una ΔV costante indipendentemente dalla corrente erogata, sarebbe potenza infinita

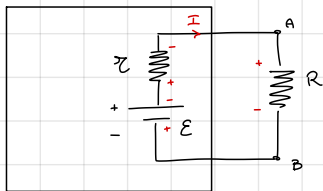
REALE: ha caduta di potenziale sulle r interne e quindi potenza finita.

Esprimiamo l'energia trasmessa dal campo elettrico alle cariche come il lavoro fatto dal campo per portare una carica dq da un polo all'altro:

$$dL = (V_A - V_B) dq = (V_A - V_B) I dt, \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = dW = (V_A - V_B) I \quad \text{potenza elettrica dissipata (in una R)}$$

$$dW = RI^2$$



"lavoro elementare"

→ pochi processo stazionario

$$dL_g = E dq = E I dt, \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dL_g}{dt} = dW_g = W_g = E I \quad \text{Def. "POTENZA ELETTRICA DISPONIBILE" (del generatore)}$$

pochi stazionario

Prese una maglia: $rI + RI - E = 0$

$$E = (r + R) I \Rightarrow I = \frac{E}{r + R}$$

$$W_g = \underbrace{r I^2}_{\text{dissipate indennamente (inutile)}} + \underbrace{R I^2}_{\text{effettivamente utilizzabile}} \quad \text{"Bilancio energetico"}$$

$P_R = R I^2$

(voglio r piccola per limitare le perdite)

$$P_R = \frac{R E^2}{(r + R)^2} = E^2 \frac{R}{(r + R)^2}$$

→ $P_R(R)$ funzione della R usata

Def. MASSIMA POTENZA UTILE

$$\frac{dP_R(R)}{dR} = E^2 \frac{r - R}{(r + R)^3}$$

$$\frac{dP_R(R)}{dR} = 0 \Leftrightarrow r - R = 0 \quad \square \quad \exists \text{ punto di max}$$

$$\left. \frac{d^2 P_R(R)}{dR^2} \right|_{r=R} < 0 \quad \text{potenza max trasferita per } r = R$$

$$P_R = \frac{E^2}{4R} \quad \square$$

POTENZA MAX TRASFERIBILE DAL CARICO

NOTA: $W_g = r I^2 + R I^2 \Big|_{r=R} = 2 R I^2$

$$P_R = \frac{E^2}{4R} \quad 50\% \text{ della disponibile} \quad P_R(r=R) = \frac{1}{2}$$

potenza disponibile al generatore

Avevamo un filo metallico di sezione S , lunghezza L , percorso da una certa corrente I , posto in una regione dello spazio dove è presente campo magnetico uniforme $\vec{B}$

Sul filo agisce una forza dovuta alle sole azioni magnetiche:

$$\vec{F} = I \underline{L} \times \underline{B}$$

modulo uguale a lunghezza L
e direzione e verso coincidenti
con lo scorrere della corrente I

Def. II° FORMULA DI LAPLACE

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int_0^L I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Quindi una carica q puntiforme, in un punto dello spazio, in movimento di velocità $\vec{v}$ in un campo di induzione magnetica $\vec{B}(\vec{r})$, subisce una forza data da:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Def. FORZA DI LORENTZ

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

• Se una carica si muove essa è sottoposta ad una forza ortogonale al vettore velocità. Dunque la forza di Lorentz non compie alcun lavoro poiché modifica la direzione ma non l'energia cinetica e dunque la velocità.

Def. MOMENTO MAGNETICO del circuito C su S di normale $\hat{n}$ percorso da corrente I orientato con regola mano dx su $\hat{n}$

$$\vec{m} = I \underbrace{S}_{a \cdot b} \hat{n}$$

se $\vec{B}$ è uniforme

normale che vede scorrere la corrente in senso antiorario

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{infatti:} \quad I a b \hat{z} \times [B_x \hat{x} + B_z \hat{z}] = I a b B \times \hat{y}$$

cioè vale per qualsiasi circuito piano di forma qualsiasi in un campo uniforme $\vec{B}$

NOTA:

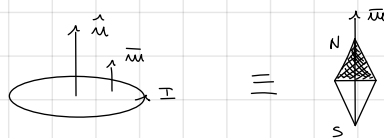
un dipolo magnetico è piccola spira percorso da corrente hanno stesso comportamento all'interno di un campo magnetico uniforme

$U_f = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ energia potenziale associata ad una spira magnetica di superficie S immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$

I° FORMULA DI LAPLACE

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I d\vec{\ell}'(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

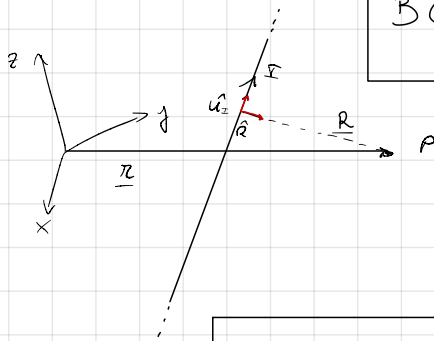
(puramente teorico)



Def. LEGGE DI BIOT - SAVART

Tenendo conto anche delle distanze, prendendo un punto generico:

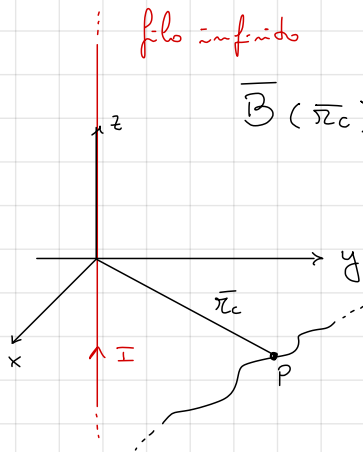
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{|\vec{R}|} (\hat{u}_I \times \hat{R})$$



NOTA: " $\vec{B}$ decreases come $\frac{1}{r}$ "

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left[\frac{Wb}{m^2} \right]$$

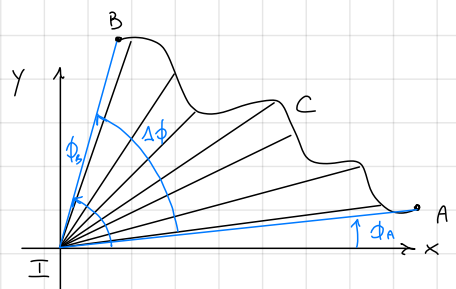
"Stress campo magnetico nel punto di osservazione"



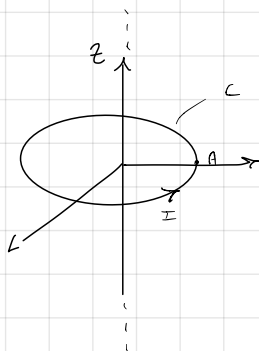
$$\vec{B}(\vec{r}_c) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_c} \hat{\phi} \quad \text{tg delle circonferenze}$$

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta\phi$$

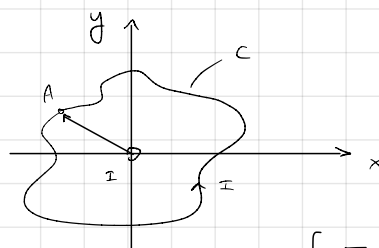
$$\bullet \Delta\phi = \phi_B - \phi_A$$



2) Suppongo linee chiuse (percorso chiuso orientato) che abbraccino le correnti concatenate con la corrente



dall'alto

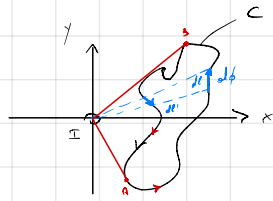
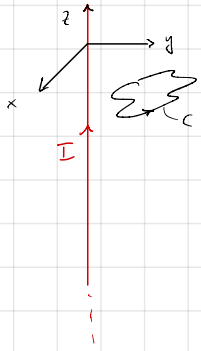


$$\Delta\phi = 2\pi$$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot 2\pi = \mu_0 I \quad \square$$

NOTA: e moltiplica per $\pm$ giri

b) Le linee chiuse non sono concatenate con le correnti:



$\oint_C \underline{B}(\underline{r}) \cdot d\underline{\ell} = 0$ le linee non concatenano
nessuna corrente
AB dipende da seno
angolo BA quindi
si sottraggono

LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPERE



$$\oint_C \underline{B}(\underline{r}) \cdot d\underline{\ell} = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \pm (\mu_0 I_i) & \text{Se } C \text{ concatena le correnti } I_i \\ & \text{"p.s.e"} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NOTA: $\underline{B}(\underline{r})$ è non conservativo

Valida per ogni campo magnetico $\underline{B}(\underline{r})$ di linee chiuse

$\Rightarrow$ "Le circuitazione del vettore induzione campo magnetico lungo un percorso chiuso è uguale alla somma delle correnti concatenate con il percorso per μ_0 "

$\Rightarrow$ Un materiale magnetizzato è considerato tale quando un insieme di atomi o molecole o domini è dotato di momento magnetico non nullo.

Def. VETTORE DI MAGNETIZZAZIONE "momento di dipolo magnetico per unità di volume"

$$\underline{M}(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^N \underline{m}_i}{\Delta V} \quad [A/m]$$

"merca dell'azione del campo magnetico applicato esterno che tende a r-disporre ogni spina elementare in un piano perpendicolare alla sua direzione"

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

"È possibile indurre una corrente in un secondo circuito in cui non è connesso nessun generatore. Si crea quindi una corrente indotta."

Legge di Faraday - Neumann

Quando il flusso del vettore induzione magnetica, concatenato con un circuito chiuso, varia nel tempo, nel circuito si induce una f.e.m. proporzionale alla variazione di flusso nel tempo

Se il flusso varia rapidamente, la f.e.m. è più grande e viceversa.

Legge di Lenz

Ogni variazione di un sistema magnetico produce un'azione che tende ad opporsi alla variazione stessa.

La variazione di flusso provoca un'azione che tenderà ad opporsi a questa variazione.

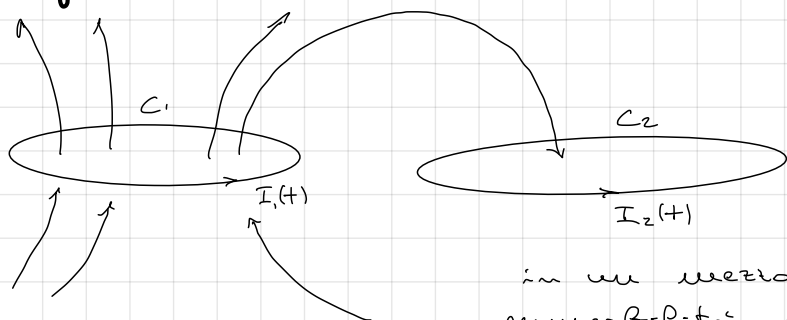
Def. LEGGE FARADAY - NEUMANN - LENZ

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi(\vec{B}, t)}{dt} \quad [V] \quad \text{"forza elettromotrice indotta"}$$

Se il circuito C è costituito da materiale conduttore, e causa della forza elettromotrice si indurrà una corrente che scorre nel circuito.

Prendendo come resistenza del circuito, R , $I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$ dalla legge di Ohm.

Def. COEFF. MUTUA INDUZIONE



Considero due circuiti isolati, quindi stazionari, cioè con una corrente che scorre nei due circuiti che varia nel tempo ma ha lo stesso valore in tutto il circuito, immerse in un mezzo lineare, omogeneo, isotropo con permeabilità magnetica costante μ .

$I_1(t)$ genera nello spazio circostante un vettore induzione magnetica. Alcune delle linee di forza si concatenano con C_2 .

In questo caso si ha che su C_2 si ha una variazione del flusso generato dal primo circuito.

$$\Phi_{21}(\vec{B}_1, t) = \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}_2 \cdot dS_2$$

Si induce quindi una f.e.m. nata dalle variazioni di Φ_{21} .

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{21}(\vec{B}_1, t)}{dt} = - \underbrace{\frac{d\Phi_{21}(\vec{B}_1, t)}{dI_1(t)}}_{\text{MUTUA INDUTTANZA "caratteristica del circuito"}} \cdot \frac{dI_1(t)}{dt}$$

Ci dice quanta è la f.e.m. indotta su C_2 dalle variazioni di corrente di C_1 .

Def. COEFF. AUTOINDUTTANZA

Averebbe nello spazio una spira di corrente percorso da $I(t)$, genera nello spazio circostante un campo di induzione magnetica variabile nel tempo.

Stesse linee di forza di questo campo variabile nel tempo attraversano la superficie che si appoggia sulle spire

Si avrà un flusso variabile nel tempo anche del circuito

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d\Phi(t)}{dI(t)}}_{\text{AUTOINDUTTANZA } L} \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

costante se la variazione lineare, soprattutto se il materiale intorno alle spire è l.v. (vuoto)

Ci dice quante è la f.e.m. autoindotta nel circuito a causa della variazione di corrente

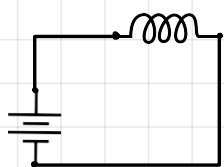
$$L = \frac{d\Phi(t)}{dI(t)} \quad \text{è una caratteristica del circuito}$$

Es. prendendo $\Phi(t) = P I(t)$, P const

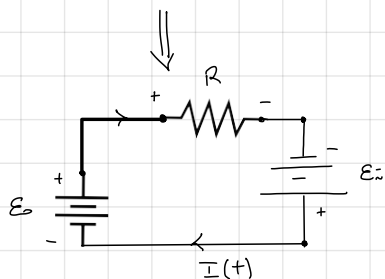
$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\Phi}{I} = P$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_i = -L \frac{dI(t)}{dt}, \quad L [H]$$

Qual'è l'effetto dell'induttanza in un circuito elettrico?



Se L è autoinduttanza del circuito e R è la resistenza totale del circuito, nel momento in cui scende una corrente variabile ai capi dell'induttanza si manifesta una f.e.m. indotta che si oppone alla causa



$$RI - \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = RI$$

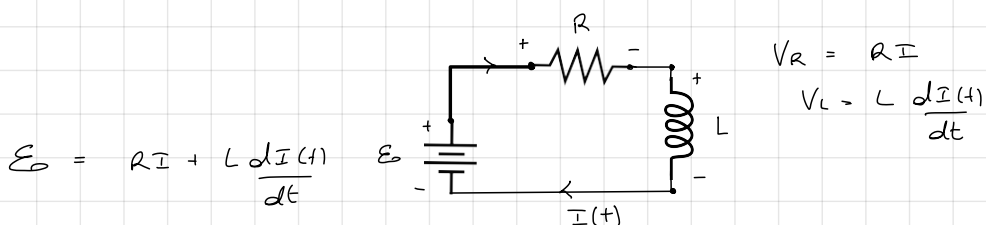
$$\mathcal{E}_0 = RI - \mathcal{E}_i \Rightarrow \mathcal{E}_0 = RI + L \frac{dI(t)}{dt}$$

IMPORTANTE: L'autoinduttanza fa nascere

ai suoi capi una d.d.p. (f.e.m. indotta)

che tende ad opporsi alla causa che l'ha generata

La f.e.m. indotta è in realtà una caduta di potenziale ai capi dell'induttanza e quindi il circuito è:



$$\mathcal{E}_0 = RI + L \frac{dI(t)}{dt}$$

