

Problemi di PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

$\min f(x) \leadsto$ funzione lineare

$x \in X$ { descritto da un insieme di equazioni e diseq. lineari

Funzione lineare è sia concava che convessa.

$$\min \underbrace{C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n}_{\text{costi associati alle variabili}}$$

PROBLEMI DI PL in FORMA STANDARD

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n = b_m$$

m eq.
lineari

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$\vdots$

$$X_m \geq 0$$

} m disequazioni
lineari

VINCOLI, m equos. e m disequs.

• Qualsiasi problema di PL può essere scritto in forma STANDARD

• $x_1, x_2, \dots, x_m$: variabili del prob. PL

• $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$: Dati, coeff di costo delle variabili della funzione obiettivo

• $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j = 1, \dots, m$: Dati
coeff delle variabili nei vincoli che descrivono X

• $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$: Dati
termini noti dei vincoli di uguaglianza

Per scrivere tutto in forma

compatta.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; \text{ Vettore costi } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

• Matrice dei
coeff. delle
variabili nei
vincoli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

• Vettore dei
termini noti

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m = c^T X$$

Sistema di
m equaz.
lineari.

$$\equiv Ax = b$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

⋮

$$x_m \geq 0$$

$$\equiv x \geq 0$$

PROBLEMA DI PL STANDARD

$$\min C^T x$$

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

X è un insieme
convesso

• L'insieme ammissibile X di un
problema di PL è un

INSIEME CONVESSO

$\min$

$$C^T x$$

Funzione lineare
(lineare e convessa)

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$



convesso

① Se x^* è min locale $\Rightarrow x^*$ è minimo globale

② L'insieme dei punti di minimo è convesso

CONDIZIONI KKT APPLICATE AD UN PROBLEMA DI PL

$$\min C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

osservando dei moltiplicatori di Lgo ai
vincoli di ugual. e di diseg.

② $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ moltiplicatori di Lagrange
dei vincoli di
uguaglianza

$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$ moltip. di Lagrange dei
vincoli di disuguaglianza

la f. di Lagrange allora sarà

$$L(x, u, s) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ - \sum_{i=1}^m u_i (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n - b_i) \\ - \sum_{j=1}^n s_j x_j$$

FUNZ. LAGRANG.

$$L(x, u, s) = c^T x - u^T \underbrace{(Ax - b)}_{h(x)} - s^T \underbrace{x}_{g(x)}$$

Voglio ora applicare le KKT

CONDIZIONI
KKT

• Sia x^* un minimo globale del prob.
di PL $\Rightarrow \exists u^* \in \mathbb{R}^m; s^* \in \mathbb{R}^n$

E tali che: Sono soddisfatte le KKT

$$1) \nabla_x L(x^*, u^*, s^*) = \\ = c^T - u^{*T} A - s^{*T} = 0^T \quad (1)$$

1) anche il grad. delle Lagrang.

$$2) Ax^* = b$$

$$3) x^* \geq 0$$

Condizioni di ammissibilità per x^*

$$4) S^* \geq 0$$

moltiplicat.

Condiz. di non negatività

$$5) \cancel{1_j g_j(x^*) = 0}$$

ora diventa

Condiz. di complementarità

(Condiz. di ortogonalità)

i due vettori sono ortogonali

$$\boxed{\sum_j s_j^* x_j^* = 0}$$

$$j = 1, \dots, n$$

dalle 1, 2

dalle 3

$$5) \sum_j s_j^* x_j^* = 0 \Leftrightarrow S^{*T} X^* = 0$$

$\Leftrightarrow$ Valgono la 3, 4, 5

Dalla 1 passo Scrivere che

$$S^{*T} = C^T - U^{*T} A \Rightarrow$$

$$\rightarrow (C^T - U^{*T} A) x^* = 0$$

• Quindi le KKT per un problema di PL sono:

$$a) Ax^* = b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ ammissibilit\`a di } x^*$$

$$b) x^* \geq 0$$

$$c) S^* = C - A^T U^* \geq 0$$

$$(S^{*T} = C^T - U^{*T} A)^T = S^* = C - A^T U^*$$

Si inverte il prodotto matriciale

$$d) (C^{*T} - U^{*T} A) x^* = 0$$

TRANSFORMO

• condizioni di complementarit\`a e non negativit\`a di S^*

$$d) \Rightarrow C^T x^* - U^{*T} A x^* = 0 \quad \text{ma } A x^* = b$$

$$\Rightarrow \underline{C^T x^* = U^{*T} b}$$

Serve per introdurre la teoria della Dualit\`a.

TEORIA DELLA DUALITA'

Associa ad ogni problema di Programmazione lineare, un problema di programmazione lineare chiamato PROBLEMA DUALE

• PROBLEMA DI PL IN FORMA STANDARD
(PROBLEMA PRIMALE)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

IL PROBLEMA DUALE

$$\max \quad b^T y \quad A^T y \leq c$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

vetture delle variabili

i dati sono gli stessi
noto dei vincoli

c diventa il terzo

$$A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

• Le condizioni KKT per

i problemi PRIMALE e DUALE sono

le stene