

Problema di PL in forma Standard

Prob Primate

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Valore variabili

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c \in \mathbb{R}^n; \quad b \in \mathbb{R}^m$$

$Ax = b$ è un sistema di m equazioni

Prob duale

$$\max b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

$$y \in \mathbb{R}^m \quad \begin{matrix} m \text{ variabili} \\ \text{variabili} \end{matrix}$$

$A^T y \leq c$ è un sistema di m disequazioni

$$A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dimostrare che le KKT sono le condizioni ottimali

KKT PROBLEMA DUALE

$$\max b^T y \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} - \min & - b^T y \\ \text{sistema di } m \text{ diseq} \end{matrix}$$

allora sono m moltiplicatori

$$A^T y \leq c$$

$$\max f(x) \equiv - \min -f(x)$$

$$g(x) \geq 0$$

• Sia v il vettore di moltiplicazione di Lagrange associato alle disuguaglianze del sistema $c - A^T y \geq 0$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Funza generica
F. Lagrange.

$$L(y, v) = f(x) - \sum_{j=1}^m v_j g_j(x) =$$

nel nostro caso $= b^T y - v^T (c - A^T y)$ Ora applico le KKT

allora

$\exists v^* \in \mathbb{R}^m$ che soddisfa le KKT:

$$1) \nabla_y L(y^*, v^*) = \underbrace{-b^T + v^{*T} A^T}_{\text{gradiente } f. \text{ Lagrang.}} = 0^T$$

$$\begin{array}{l}
 2) \quad c - A^T y^* \geq 0 \quad \text{ammissibilità} \\
 3) \quad v^* \geq 0 \quad \text{"} g_s(y^*) \text{"} \\
 4) \quad v_j^* \underbrace{(c - A^T y^*)_j}_{\substack{\text{parte sinistra} \\ \text{della } j\text{-esima} \\ \text{disuguaglianza}}} \stackrel{?}{\geq} 0 = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, m
 \end{array}
 \quad \Leftrightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 v^{*T} (c - A^T y^*) = 0 \\
 v^T (c - A^T y^*) = 0
 \end{array}$$

$\underbrace{v_j^*}_{\substack{\text{3) } \leq \\ 0}} \underbrace{\quad}_{\substack{\text{desino moltiplic.} \\ \text{di lag.}}} \quad \underbrace{\quad}_{\substack{\text{parte sinistra} \\ \text{della } j\text{-esima} \\ \text{disuguaglianza}}} \stackrel{?}{\geq} 0 = 0$

KKT del PROB. DUALE

$$1) \quad -b + A v^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A v^* = b}$$

$$2) \quad c - A^T y^* \geq 0$$

$$3) \quad v^* \geq 0$$

$$4) \quad v^{*T} (c - A^T y^*) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

applico Teorema a SK

$$\Leftrightarrow (c^T - y^{*T} A) v^* = 0$$

Quindi: Ponendo $x^* = v^*$ e $u^* = y^*$

le KKT del problema PRIMALE

$$\begin{array}{l}
 \min \quad c^T x \\
 A x = b \\
 x \geq 0
 \end{array}$$

e del problema DUALE

$$\begin{array}{l}
 \max \quad b^T y \\
 A^T y \leq c
 \end{array}$$

CONCLUDONO

ovvero

1) I moltiplicatori di Lagrange v^* del problema primale all'ottimo coincidono con la soluzione ottima y^* del problema duale

2) I moltiplicatori di Lagrange v^* del problema duale coincidono con la soluzione ottima x^* del problema primale

Problema duale ha le stesse Condizioni di
ottimalità del problema primale

Dalle condizioni di complementarità
(o ortogonalità) del problema duale
(comol. 4)

$$4) (C^T - y^{*T} A) v^* = 0 \Rightarrow C^T v^* - \underbrace{y^{*T} A v^*}_{\ddot{b}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C^T v^* = y^{*T} b}$$

$$\Rightarrow \text{Dato che } x^* = v^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{C^T x^*}_{\text{f. valore ottimo}} = y^{*T} b = \underbrace{b^T y^*}_{\text{f. valore ottimo}}}$$

Se x^* e y^* sono soluzioni ottime dei problemi primal e dual, rispettivamente, allora tutte le KKT si ha

$$C^T x^* = b^T y^*$$

ovvero: le soluzioni ottime dei due problemi coincidono.

PROB. IN FORMA
STANDARD IN
PROB. PRUALE

PROB IN FORMA
STANDARD IN
PROB DUALE

$$\min C^T x$$

=

$$\max b^T y$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A^T y \leq C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^T - A^T y \geq 0$$

Siano x^* e y^* soluzioni ottime

dei prob pruale e duale rispettivamente

$\Rightarrow$ Le kkt sono:

= condizioni grad. lagrang.

$$1) Ax^* = b$$

$$2) x^* \geq 0$$

cond. di ammissibilità
del punto x^*

$$3) C - A^T y^* \geq 0$$

cond. di ammissibilità
del punto y^*

$$4) x^{*T} (C - A^T y^*) = 0$$

cond. di compl.
o ortogonalità

$$\hookrightarrow 4) \underbrace{x^*}_{\substack{\text{VI} \\ 0}}^T \underbrace{(C - A^T y^*)}_{\substack{\text{VI} \\ 0}} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

la scrivo componente
per componente

la scrivo
componente per componente

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_j^* (c_j - A^T y^*)}_{} = 0 \quad \forall j=1 \dots n$$

j -esima componente
del primale all'ottimo

↓
la parte sinistra
del vincolo j -esimo
all'ottimo

una delle due $\Rightarrow$ entrambi devono essere
nulli che sia la variabile j -esima
o la parte sx' del vincolo j -esimo.

Come se " $g_j \geq 0$ " vincolo soddisfatto all'equilibrato

Le condizioni di complementarità o
ortogonalità implicano che all'ottimo
si abbia

$$x_j^* = 0 \quad \text{e/o}$$

$$c_j - A^T y^* = 0$$

parte sx' del
vincolo j -esimo
del duale

• Variabile $x_j^* = 0$

e/o vincolo del duale

soddisfatto all'equilibrato

Proprietà

PROBLEMA PRIMALE

PROBLEMA DUALE

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

Proprietà di Dualità Debole

Siano x^* e y^* soluzioni ammissibili

rispettivamente del problema primario

e del problema duale, allora si

ha la seguente condizione

$\Rightarrow$ si ha:

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$$

con $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili

il valore della
f. obiettivo del
primario è sempre
 $\geq$ del valore
della funzione
obiettivo del
problema duale in
 $\bar{y}$.

DIM.

Hp. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ammissibili

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} A \bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases} \\ A^T \bar{y} \leq c \end{cases}$$

Th. $C^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$

• Per l'ammissibilità di $\bar{y} \Rightarrow (A^T \bar{y}) \leq (C)^T$ applico il
trasposto

$\Rightarrow \bar{y}^T A \leq C^T$ moltiplico per $\bar{x}$ o
dx

$\Rightarrow$ poiché $\bar{x} > 0$ si ha $\bar{y}^T A \bar{x} \leq C^T \bar{x} \Rightarrow$ si mantiene
la diseq.

Per l'ammissibilità di $\bar{x} \Rightarrow A \bar{x} = b \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}^T b \leq C^T \bar{x} \Leftrightarrow C^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$

• 

Proprietà di Dualità forte

Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili dei
problemi primal e duale rispettivamente.

Se si ha $C^T \bar{x} = b^T \bar{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni OTTIME dei
rispettivi problemi.

DIA

Se in un pto
 $C^T \bar{x}$ e $b^T \bar{y}$ sono uguali
allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono sol. ottime

Hp $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ammissibili;

$$C^T \bar{x} = b^T \bar{y}$$

Th. $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime
dei rispettivi problemi.

Per la dualità debole $\Rightarrow C^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$

Sia y^* una soluzione ottima del

problema duale. $\Rightarrow$ per dualità debole si ha

$$\Rightarrow C^T \bar{x} \geq b^T y^* \quad \forall \bar{x} \text{ ammissibile per il problema primale}$$

$\Rightarrow$ il valore della funzione obiettivo

del problema primale non è

mai inferiore al valore della

f. obiettivo del problema duale

all'ottimo.

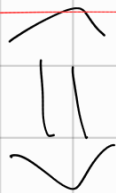
$\Rightarrow$ il valore minimo di $c^T x$ è pari al valore del valore della f. o. b. del problema duale all'ottimo.

$$\Rightarrow \text{Se } c^T \bar{x} = b^T y^* \Rightarrow$$

x^* deve essere soluzione ottima del problema primale.

Teorema

Due soluzioni x^* e y^* ammissibili per i problemi primale e duale sono anche soluzioni OTTIME



$$c^T x^* = b^T y^*$$

Condiz.
necessarie e
suff. di
ottimo per
prob. primale
e duale

DIM

View delle 2 precedenti

$\Rightarrow$ KKT ; $\Leftarrow$ dual' forte

Siano x^* e y^* soluzioni ottime
primal e dual $\Rightarrow$ valgono le KKT
 $\Rightarrow C^T x^* = b^T y^* \Rightarrow$ per la
dual' forte $\Rightarrow x^*$ e y^* sono sol.
ottime per primal e dual

Nella P.L. le KKT sono Necessarie
e Sufficienti di ottimo (globale)

• Nella P.L. le KKT valgono
anche nei punti non regolari.

Se un punto soddisfa le KKT, è un min globale

Regole per trovare problema duale
dato un problema primale.

Regole per la COSTRUZIONE del

PROBLEMA DUALE DI UN QUALSIASI

PROBLEMA PRIMALE (nella forma di min)
forma più generale

PRIMALE

DUALE

$$\min c^T x$$

$$\max b^T y$$

$$Ax \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b$$

m
vincoli

posso avere varie forme

$$x \begin{cases} \geq \\ \leq \\ \text{libere} \end{cases} 0$$

n variabili

$$A^T y \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} c$$

n
vincoli

$$y \begin{cases} \geq \\ \leq \\ \text{libere} \end{cases} 0$$

m
variabili

Una variabile duale per ogni vincolo del
primale e un vincolo duale per
ogni variabile del primale.



• I vincoli delle disuguaglianze che definiscono i vincoli del problema definiscono il segno delle variabili del duale

• il segno delle variabili del duale definiscono il verso delle disuguaglianze dei vincoli del duale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

A posso riscrivere in 2 modi oppure $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$

$$Ax = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

posso scrivere

$$A^T y \leq c$$

$$a_i^T x = b_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^T x = b_1 \\ \vdots \\ a_m^T x = b_m \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ A_1^T y \leq c_1 \\ A_2^T y \leq c_2 \\ \vdots \\ A_m^T y \leq c_m \end{array}$$

$$a_i^T x = b_i$$

$$A_j^T y \leq c_j$$

Regole per la COSTRUZIONE DEL DUALE

PRIMALE

DUALE

min

> max

h. ob.

h. ob.

$$c^T x$$

$$b^T y$$

vincoli:

variabili:

riga i-esima di A

$$a_i^T x \geq b_i$$

$$y_i \geq 0$$

$$a_i^T x \leq b_i$$

$$y_i \leq 0$$

$$a_i^T x = b_i$$

y_i è libera

variabile

vincolo

colonna j -esima di A^T

$$x_j \geq 0 \rightarrow A_j^T y \leq C_j$$

$$x_j \leq 0 \rightarrow A_j^T y \geq C_j$$

$$x_j \text{ è libera} \rightarrow A_j^T y = C_j$$

• Per ogni coppia vincolo e duale

le condizioni KKT vincolo e

sono condizioni necessarie e

sufficienti di ottimalità globale.

Valgono inoltre le proprietà di
duale globale e forte