

Prob Primale

Prob duale

FORMA $Ax \geq b$

CANONICA

$$x \geq 0$$

$$\max \quad b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

Le KKT sono condiz. neces. e suff.

x^* e y^* sono soluzioni ottime dei

rispettivi problemi, primale e duale, $\Leftrightarrow$

valgano le seguenti condizioni (KKT)

• $Ax^* \geq b$
 $x^* \geq 0$ } condiz. di
 ammissibilità di x^* per il
 primale

• $A^T y^* \leq c$
 $y^* \geq 0$ } ammissibilità del punto y^* per il
 duale

all'ottimo $x^* y^* = 0$
 o il $\exists$ diseq. o. soddisf.
 all'uguaglianza
 $i = 1, \dots, m$

$(c - A^T y^*)_j \cdot x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$
 $(c_j - A_j^T y^*) \cdot x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$

$(Ax^* - b)_i \cdot y_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m$

all'ottimo
 o l'ineq.
 vincolo del
 primale e-

$$(a_i^T x^* - b_i) \cdot y_i^* = 0 \quad i=1 \dots m$$

Sono condizioni diverse Scritte in 2 modi

Satisfying all'eq. oppure nessuna variabile del dual è nulla

Proprietà di dualità debole

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y} \quad \bar{x} \text{ e } \bar{y} \text{ ammissibile}$$

Proprietà di dualità forte

$$c^T x^* = b^T y^* \iff x^* \text{ e } y^* \text{ sono soluzioni ottime}$$

$$\min \quad 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1 \rightsquigarrow y_1 \geq 0$$

$$x_2 + x_3 \leq 2 \rightsquigarrow y_2 \leq 0$$

$$x_1 - x_3 = 3 \rightsquigarrow y_3 \text{ libera}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \text{ libera}$$

$$\min \quad c^T x \rightsquigarrow \max \quad b^T y$$

$$c = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

fu dualo

$$\max_x b^T y = y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

VINCOLI DUALI

colonne A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ righe di A

$$A_1^T y \leq c_1$$

$\hookrightarrow$ colonna 1 righe A

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq 10 \Rightarrow 2y_1 + y_3 \leq 10$$

1° vincolo dualo

$$A_2^T y \geq c_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 20$$

$$\Rightarrow -y_1 + y_2 \geq 20$$

2° vincolo dualo

$$A_3^T y = c_3$$

perché y_3 libera

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 30$$

$$\Rightarrow y_2 - y_3 \geq 30$$

Problema Anale

$$\max \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$2y_1 + y_3 \leq 10$$

$$-Y_1 + Y_2 \geq 20$$

$$\frac{y}{2} - \frac{y}{3} = 30$$

$$1/1 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \leq 0$$

73 li bre

 kkT

$\Rightarrow x^x \cdot y^x$ (no bl. thing)

- X^* ammissibile per il problema
- Y^* il il duale

$$(2x_1^* - x_2^* - 1) y_1^* = 0$$

$$(x_2^* + x_3^* - 2) y_2^* = 0$$

Cond 1 2
D1

$$(x_1^* - x_3^* - 3) y_3^* = 0$$

rientra
nell'ammassabilità
del primo

complement.
o ortog.
normali

$$(10 - 2y_1^* - y_3^*) x_1^* = 0$$

$$(20 + y_1^* - y_2^*) x_2^* = 0$$

$$(30 - y_2^* + y_3^*) x_3^* = 0$$

Sarà sempre soddisfatta se x^* ammissibile
rientra nell'ammassabilità del duale

MINUTO 35 registri

E sarà zero.

Si verifici se all'optimum

x_3 e x_5 siano positivi e

la variabile del secondo
vincolo si liberi
sia pari a $\frac{3}{2}$

$$\min -\frac{1}{2} x_1 + 5x_2 - x_4$$

Calcolare la soluzione
con KKT e dualità forte.

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_4 \geq 0 \quad \leadsto y_1 \geq 0$$

$$2x_3 + x_4 + 2x_5 = 8 \quad \leadsto y_2 \text{ libera}$$

$$2x_2 - 3x_4 - 2x_5 = -10 \quad \leadsto y_3 \text{ libera}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

All'ottimo si ha

$$x_3^* \neq 0$$

$$x_4^* = \frac{10}{3}$$

$$\|y^*\| = \frac{1}{2}$$

Trovare le soluzioni ottime dei problemi

primali e duali, avendo queste informazioni

Problema duale

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\max_x \quad b^T y = 8y_2 - 10y_3$$

$$A^T y \leq c$$

perché $x \geq 0$

$$c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{R}^{5 \times 3}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^T y \leq c_1 \\ \vdots \\ A_5^T y \leq c_5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 \leq -\frac{1}{2} \\ 2y_1 + 2y_3 \leq 5 \\ 2y_2 \leq 0 \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 \leq -1 \end{array} \right.$$

$$y_1 \geq 0; \quad y_2, y_3 \text{ libere} \quad \left(2y_2 - 2y_3 \leq 0 \right)$$

$$(1D) \Rightarrow y_1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y_1^* = \frac{1}{2}$$

poiché $x_3^* \neq 0 \Rightarrow$ per le condizioni di complementarità, il vincolo

(3D) deve essere soddisfatto all'ottimalità

$$\Rightarrow (3D) \quad 2y_2^* = 0 \Rightarrow y_2^* = 0$$

Analogamente poiché $x_4^* = \frac{10}{3} \neq 0 \Rightarrow$

il vincolo (4D) sarà soddisfatto

all'ottimalità

$$\Rightarrow (4D) \Rightarrow 2y_1^* + \frac{1}{2}y_2^* - 3y_3^* = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 3y_3^* = -1$$

$$y_3^* = \frac{2}{3}$$

Stento con le
condiz. di complementarità

$$y_1^* = \frac{1}{2} \quad y_2^* = 0 \quad y_3^* = \frac{2}{3}$$

Non steno controllare che la
soluzione sia ammissibile per il
problema duale. Ho visto i

3 vincoli duali, e sono riuscito
a ricavare y_1, y_2 e y_3 .

Due valori se sostituisco anche 2D e 5D
sostituendo.

$$2D \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} \leq 5 \quad \text{Vero!}$$

$$5D \Rightarrow 2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{2}{3} \leq 0 \quad \text{Vero!}$$

La soluzione è ammissibile per il
duale.

Soluzione del primale? Conosco quella del duale.

Poiché $y_1^* = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ primo vincolo primale stavano soddisfatto all'uguale.

$$-x_1^* + 2x_2^* + 2x_4^* = 10$$

$$\left(y_1^* = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow 2x_2^* - 3x_4^* - 2x_5^* = -10 \right.$$

già lo so

Poiché 2D e 5D non sono soddisfatti

all'uguale della soluzione y^* , allora

$\Rightarrow$ per le condiz. di complementarità

le corrispondenti variabili primali

x_2^* e x_5^* sono 0 all'ottimo.

$$\Rightarrow x_2^* = x_5^* = 0 \quad ; \quad x_4^* = \frac{10}{3}$$

$\Rightarrow$ 1 vincolo del primo livello

$$\begin{cases} -x_1^* + 2x_3^* = 0 \\ 2x_3^* + x_4^* = 8 \\ -3x_4^* = -10 \end{cases}$$

Sostituendo all'equazione per $y_1^* \neq 0$

$$x_4^* = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{20}{3}$$

$$2x_3^* = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow x_3^* = \frac{7}{3}$$

$$x_5 = 0$$

Soluzione ottima problema primale.

Se voglio verificare, posso usare la
dualità forte

Verifica $C^T x^* = b^T y^*$

$$C^T x^* = \frac{-1}{2} \left(\frac{20}{3} \right) - \frac{10}{3} = \frac{-20 - 20}{6} = \frac{20}{3}$$

$$\ln^{\tau} y^{\alpha} = -\log\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

È verificata la doppia fonte