

Esercizi Primali

$$\min 3x_1 - 5x_2 - 3x_4 - x_5$$

$$-x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 \geq -4$$

$$-2x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 - 3x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq -4$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

Verifichiamo se all'ottimo si può scrivere

$$x_2 \neq 0 ; x_3 \neq 0$$

Forma
Canonica

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$\leadsto$

Duale

$$\max x^T b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

$$b = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$

$$\max -4y_1 - 4y_2$$

$c =$ "costi" ~~da~~
di obiettivi

$$A = \begin{pmatrix} \overset{A_1}{-1} & \overset{A_2}{-3} & \overset{A_3}{3} & \overset{A_4}{-2} & \overset{A_5}{-1} \\ \overset{A_1}{-2} & \overset{A_2}{\frac{3}{2}} & \overset{A_3}{-4} & \overset{A_4}{-3} & \overset{A_5}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto A^T y \leq c$$

$$D_1: -y_1 - 2y_2 \leq 3 \leftarrow c_1 \quad 1^o \text{ vincolo}$$

$$D_2: -3y_1 + \frac{3}{2}y_2 \leq -5 \leftarrow c_2$$

$$D_3: 3y_1 - 4y_2 \leq 0 \leftarrow c_3$$

devono
essere diversi
da 0 da
Traccia

allora loro derivata
essendo = 0

$$x_2 (A_2^T y^* - c_2) = 0$$

$$0 \neq x_3 (A_3^T y^* - c_3) = 0$$

$D_1: -2y_1 - 3y_2 \leq -3 \rightsquigarrow c_4$ | deve essere soddisfatto all'uguaglianza
 $D_5: -y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq -1 \rightsquigarrow c_5$
 $y_1 \geq 0; y_2 \geq 0$

Somma $\rightarrow$

$$\begin{cases} -3y_1 + \frac{3}{2}y_2 = -5 \\ 3y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases}$$

ho trovato y_2 e y_1

ma cosa dicono le KKT?

una coppia di soluzioni è
 ottima se ho ammissibilità
 nel primal e dual, e se
 ho le condiz. di ottimalità.

Devo dunque verificare

ammissibilità di x^* e y^*

Sono soddisfatti i vincoli $D_1, D_2, \dots, D_5$? (vincoli del dual)

Sostituisco y_1 e y_2 trovati nei vincoli.

$y = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ è ammissibile per il dual

Poiché (D_1) non è soddisfatto all'uguaglianza $\Rightarrow$

per le condizioni di ottimalità, $X_1 = 0$ deve essere

Poiché (D_5) non è soddisfatto all'uguaglianza,

$X_4 = 0$
 Poiché (D_5) non è soddisfatto all'uguaglianza, $X_5 = 0$

Poiché $y_1 > 0 \Rightarrow$ per le condizioni di ottimalità, 1° vincolo
 primale deve essere soddisfacente
 all'equazione

$$y_2 > 0 \Rightarrow$$

$\hookrightarrow$ il 2° vincolo deve essere
 soddisfacente all'equazione

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -4 \\ -2x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 - 3x_4 + \frac{1}{2}x_5 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = -4 \\ \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_2 - 8x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\parallel -5x_3 = -12$$

$$x_3 = \frac{12}{5}$$

ora sostituire

$$-3x_2 + 3\left(\frac{12}{5}\right) = -4$$

$$\Rightarrow -3x_2 = -4 - \frac{36}{5} = -\frac{56}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{56}{15}$$

Soluzione ottima primale

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{56}{15} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione ottima duale

$$u = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Applico audità forte per verificare.

$$\Rightarrow C^T x = b^T y$$

Dualità forte

$$C^T x = -5 \cdot \frac{56}{15} = -\frac{56}{3} ;$$

$$b^T y = -4 \cdot \frac{8}{3} - 4 \cdot 2 = -\frac{56}{3} ;$$

Soddisfanno la dualità forte

Esercizio 2, Programmazione vincolata

$$\Rightarrow \min -x_1^3 + x_2^2$$

$$g_j(x) \geq 0$$

$$-1, \rightsquigarrow g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \geq 0$$

$$-1, 2 \rightsquigarrow g_2(x) = (x_1 - 2)^2 + x_2 \geq 0$$

$$-1, 3 \rightsquigarrow g_3(x) = x_1 \geq 0$$

$$-1, 4 \rightsquigarrow g_4(x) = 1 - x_1 \geq 0$$

Posso escludere tutti i minimi locali: i punti regolari che

NON soddisfanno le KKT

(i punti regolari che soddisfanno, e punti non regolari per ipotesi esclusa)

$$L(x, \lambda) = -x_1^3 + x_2^2 - \lambda_1((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1) - \lambda_2((x_1 - 2)^2 + x_2) - \lambda_3 x_1 - \lambda_4(1 - x_1)$$

KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \lambda^*) = -3x_1^2 - 2\lambda_1(x_1 - 1) - 2\lambda_2(x_1 - 2) - \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x^*, \lambda^*) = 2x_2 - 2\lambda_1(x_2 - 1) - \lambda_2 = 0$$

$$g_1(x^*) \geq 0 \quad ; \dots \quad ; \quad g_4(x^*) \geq 0$$

$$\lambda_1^* \geq 0 \quad ; \dots \quad ; \quad \lambda_4^* \geq 0$$

$$\lambda_1^* g_1(x^*) = 0 \quad ; \quad \lambda_2^* g_2(x^*) = 0 \quad ; \quad \lambda_3^* g_3(x^*) = 0 \quad ; \quad \lambda_4^* g_4(x^*) = 0$$

• λ_1 o $g_1(x^*)$ devono essere per forza = 0

Verifichiamo quindi se i punti di base ammissibili.

$$A = (1, 0) = (x_1, x_2)$$

g_1 è attivo

g_2 è attivo

g_3 non attivo

g_4 è attivo

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 - 1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$x \in \mathbb{R}^2$$

già visto che A non è regolare, solo in $\mathbb{R}^2$ e A ha 3 vincoli:

In A sono attivi 3 vincoli. poiché $x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow A$ non regolare

$\Rightarrow A$ potrebbe essere minimo locale.

$$B = (0, 1)$$

$$\text{ATTIVI} = g_1, g_3$$

$$\text{NON ATTIVI} = g_2, g_4$$

$$g_2, g_4(B) > 0$$

$$g_1, g_3 = 0$$

$$\nabla g_1(B) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B non
regolare, non
linearmente indipendente.

$\Rightarrow B$ è non regolare $\Rightarrow B$ candidato a minimo locale



$$C = (0, 1)$$

ATTIVO: g_2, g_3

NON ATTIVO: g_1, g_4

$$\nabla g_2(C) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C punto regolare

Dalla KKT, dove non ho vincoli attivi, devo avere moltiplicatori $\lambda_g^* = 0$

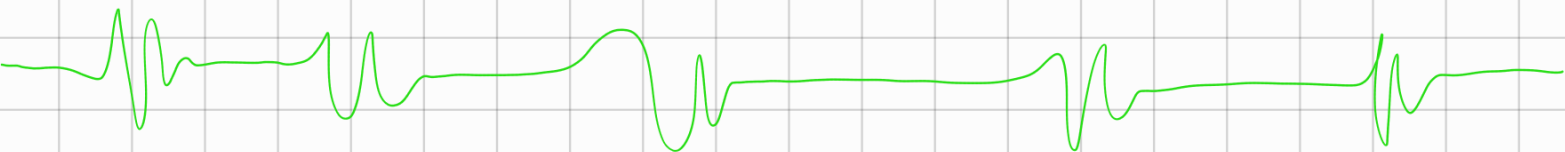
perché $\lambda_1^* g_1(x^*) = 0$ e $\lambda_4^* g_4(x^*) = 0$

Devo trovare i moltiplicatori

$$\frac{d}{dx_1} (C, \lambda^*) = -2\lambda_2^* (-1) - \lambda_3^* = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} (C, \lambda^*) = -2 - \lambda_2^* = 0 \Rightarrow \lambda_2^* = -2 < 0! \text{ IMPOSSIBILE!}$$

$\Rightarrow C$ non soddisfa le KKT $\Rightarrow C$ non è
MINIMO LOCALE



$$D = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$g_1(D) = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 1 = \frac{4+9}{16} - \frac{16}{16} = \frac{-3}{16} < 0!!$$

$\Rightarrow D$ non è punto candidato.

$D \notin X$

$$E = (0, 0)$$

g_1 non è attivo

$$g_1(E) > 0$$

g_2, g_4 " " " "

g_3 è attivo

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_4^* = 0$$

$\nabla g_3(E) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$, lin. ind. $\Rightarrow E$ è punto regolare

Controllo KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(E, \lambda^*) = -\lambda_3^* = 0$$

$$\lambda_3^* = 0$$



$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(E, \lambda^*) = 0$$



Il punto E soddisfa le KKT $\Rightarrow$ allora è candidato a minimo locale.

Atten. per

$$\min -2x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 1$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_5 = 2$$

$$-2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 \geq 0 \dots x_5 \geq 0$$

- E' possibile che all'ottimo x_1 e x_3 siano variabili $\neq 0$? ($x_2 = x_4 = x_5 = 0$)

Primal

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$\Rightarrow$

Dual

$$\max b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\max y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$

$$A_1^T y = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq -2$$

D_1 Problem

$$A_2^T y = -2y_1 - 2y_2 \leq 5$$

D_2 Infeas

$$A_3^T y = y_3 \leq -1$$

D_3

$$A_4^T y = y_1 + 2y_3 \leq -2$$

D_4

$$A_5^T y = y_2 + y_3 \leq -2$$

D_5

vincoli primali

Soluzioni del
primal

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_1 = 2 \\ -2x_1 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 4$$

Poiché $x_1 \neq 0$, D_1 dovrà essere soddisfatto all'ipotesi $\Rightarrow y_1 + 2y_2 - 2y_3 = -2$

" $x_3 \neq 0 \Rightarrow D_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -1$

Sostituendo $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 + 2y_2 = -4} \Rightarrow \boxed{y_2 = -2 - \frac{1}{2}y_1}$$

$$C^T x = b^T y \quad \text{e so da } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T x = -b$$

$$b^T y = y_1 + 2y_2 + 2y_3 = y_1 + 2y_2 - 2$$

$$C^T x = b^T y \Rightarrow y_1 + 2y_2 = -4$$

ancora non ho
un modo chiaro
ma delle due

controllo gli altri vincoli

$$\begin{cases} y_2 = -2 - \frac{1}{2} y_1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

uso D2 che non ho mai usato, e sostituisco quello che ho
trovato prima

$$(D_2) \Rightarrow -2y_1 - 2(-2 - \frac{1}{2} y_1) \leq 5 \Rightarrow$$

$$(D_4) \Rightarrow y_1 - 2 \leq -2 \Rightarrow y_1 \leq 0$$

$$(D_5) \quad \underbrace{-2 - \frac{1}{2} y_1}_{y_2} \quad \underbrace{-1}_{y_3} \leq -2 \Rightarrow y_1 \geq -2$$

~~non~~
-1 0

$$\begin{cases} y_1 \geq -1 \\ y_1 \leq 0 \\ y_1 \geq -2 \end{cases}$$

Se y_1 è tra -1 e 0, le KKT sono soddisfatte.

ho infinite soluzioni D2 me del problema
duale.

$$\begin{cases} -1 \leq y_1 \leq 0 \\ y_2 = -2 - \frac{1}{2} y_1 \\ y_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \infty \text{ soluzioni D2 me del problema duale}$$

Per cui si fa che $c^T x = b^T y$ con x e y ausiliari.

Problema

$$\min (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2$$

$$g_1(x) = -x_1^3 + x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = 2 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_3(x) = 4 - x_2^2 \geq 0$$

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + 2x_2^2 - \lambda_1(-x_1^3 + x_2^2) - \lambda_2(2 - x_1 - x_2) - \lambda_3(4 - x_2^2)$$

KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) = 2(x_1 - 2) + 3\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) = 4x_2 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 + 2\lambda_3 x_2 = 0$$

$$g_1(x) \geq 0 ; g_2(x) \geq 0 ; g_3(x) \geq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \quad \lambda_3 \geq 0$$

$$\lambda_1 g_1(x) = 0 \quad \lambda_2 g_2(x) = 0 \quad \lambda_3 g_3(x) = 0$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = (0,0)$$

g_1 attivo

g_2, g_3 non attivi

$$\nabla_{g_2}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A punto non regolare

$\Rightarrow$ Candidato a min loc.

$$B = (1,1)$$

g_1, g_2 attivo

g_3 non attivo

$$\nabla_{g_1}(B) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_2}(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

∇ lin indipendenti

$\Rightarrow B$ punto regolare

controlla la KKT

dove $\lambda_3 = 0$

KKT

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow 6 - 5\lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{12}{5} + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -20 + \frac{12}{5} < 0 !!$$

B non soddisfa la KKT

$$C = (0,2)$$

g_1 non attivo

g_2, g_3 attivo

$$\lambda_1 = 0 \quad \nabla_{g_2}(C) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{g_3}(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ lin ind.}$$

KKT: $\frac{\partial L(C, \lambda)}{\partial x_1} \Rightarrow \lambda_2 = 4 > 0 \quad \text{ok}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} : \dots \lambda_3 = \frac{-12}{4} \text{ NO.} \quad \text{NO KKT}$$

$$D = \left(\frac{1}{2}, i\sqrt{\frac{2}{4}} \right) \quad g_1 \text{ attivo} \quad g_2, g_3 \text{ non attivo}$$

$$\nabla_{g_1}(D) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{8} \end{pmatrix} \neq 0 \quad D \text{ regular}$$

KKT

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 2 \end{array} \right\} \text{NON SODDISFATTO KKT,}$$

$$E = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{8}}{24} \right) \quad g_1, g_2 \text{ attivi} \quad g_3 \text{ no}$$

$$E \text{ punto regolare, non soddisfa le KKT} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_1 > 1 \quad \lambda_1 \neq 0$$

Nel punto $C(0, L)$ sono attivi g_2, g_3

$$\nabla_{g_2}(C) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla_{g_3}(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d \in \mathbb{R}^2 \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{g_2}(C)^T d \geq 0$$

$$\nabla_{g_3}(C)^T d \geq 0$$

Condizioni
di ammissibilità

$\nabla h(c)^T d < 0 \Rightarrow d$ è direzione di discesa

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla h(c) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -d_1 - d_2 \geq 0 \\ -4d_2 \geq 0 \\ -4d_1 + 8d_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow d_2 \leq 0$$

ipotesi $d_2 = -1$

$$-d_1 + 1 \geq 0$$

$$-1 \leq 0$$

$$-4d_1 - 8 < 0$$

Se ad esempio $d_1 = 0$
" " " $d_1 = 1$

$d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è direzione
di discesa
ammissibile
 $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ " "

Proprietà dualità

- Il problema duale è un problema
duale con il problema primale

Es.

Principale

$$\begin{aligned} \min C^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

duale

$$\begin{aligned} \max b^T y \\ A^T y \leq c \end{aligned}$$

$$-\min -b^T y$$

$$\Rightarrow -A^T y \geq -c$$

duale del duale

$$\begin{aligned} -\max -C^T x \\ -Ax = -b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Principale

$$\begin{aligned} \min C^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

- Se il principale è illimitato, allora il duale non ha soluzioni ammissibili.

DM M_p Principale illimitato $C^T x \rightarrow -\infty$

Il duale non ha soluzioni ammissibili.

uso dualità debole

$$C^T \bar{x} \geq b^T y \quad \forall \bar{x} \in J \text{ Sol. ammissibili}$$

Quanto $\bar{x}$ è sol. ottima principale, tanto

$$C^T x \rightarrow -\infty$$

$$b^T \tilde{y} \leq -\infty$$

$\forall y$ unendlich sel. stark

non positive linear space.

$\Rightarrow$ il stark non kon. sel. unendlich