

Esercizio versione 2, possibile qualunque

$$(-) \min -x_1 - x_2 - x_3$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3, x_5 > 0 (\neq 0)$$

$$y_2 = \left| \frac{3}{2} \right|$$

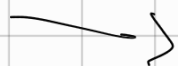
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{perde}$$

Primal

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$



Dual

$$\max b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

y libero

$$\max 3y_1 + 10y_2 + 3y_3$$

$$(-1) -2y_1 + 2y_2 \leq -1$$

$$(0) 2y_1 + y_2 - 3y_3 \leq -1$$

$$(0) 2y_1 - 2y_3 \leq -1$$

$$y_2 = \left| \frac{3}{2} \right|$$

$$[x_3 > 0] \leadsto 2y_1 - 2y_3 = 1$$

$$(1D) \quad 2y_2 - y_3 \leq 0$$

$$(2D) \quad -y_1 + 2y_3 \leq 0 \quad (x_3 > 0) = -y_1 + 2y_3 = 0$$

$$(A^T y^* - c_j) x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow y_1 = -1 \Rightarrow y_3 = -\frac{1}{2}$$

$$y_2 \begin{cases} < \frac{3}{2} \\ > -\frac{3}{2} \end{cases} \quad ?$$

$$\star \quad 2y_2 + \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow y_2 \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow y_2 = -\frac{3}{2}$$

non posso essere i numeri 1 e 2

$$y_1 = -1; \quad y_3 = -\frac{1}{2}; \quad y_2 = -\frac{3}{2}$$

1D Satisfatto all'uguale $x_1 \neq 0$

2D Satisfatto ma non all'uguale, < 0
 $\Rightarrow x_2 = 0$

4D " $< 0 \Rightarrow x_4 = 0$
 non soddisfatto

max. value col.

$$A_x = b \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ 2x_1 = 10 \\ -2x_3 + 2x_5 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_5 = 13 \\ -2x_3 + 2x_5 = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x_3 = 29$$

$$x_5 = 16$$

$$x_3 = \frac{29}{2}$$

$$x_1 = 5; x_2 = 0; x_3 = \frac{29}{2}; x_4 = 0; x_5 = 16$$

Come prova, dualità forte.

$$C^T x^* = b^T y^*; \quad C^T x^* = -5 - \frac{29}{2} = \frac{39}{2}$$

$$b^T y^* = 3(-1) + 10\left(-\frac{3}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{39}{2}$$

INIZIO LEZIONI

Programmazione
Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

FORMA
STANDARD

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

FORMA
CANONICA

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{m \times n} \\ b &\in \mathbb{R}^m \\ c &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Qualunque problema si può scrivere nella forma standard o nella forma canonica.

$$\max c^T x \rightarrow -\min -c^T x$$

$$Ax \geq b \quad ? \quad Ax = b \quad ?$$

Come posso scrivere la canonica e standard?

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

}

introduco una nuova variabile
e la sottraggo a sinistra

sono
equivalenti

$$\begin{cases} S_i \geq 0 & \text{variabile di Surplus} \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - S_i = b_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax \leq b & \rightsquigarrow Ax = b \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \end{cases}$$

introduco una nuova variabile, vedo quale
ciò che ho
a sinistra
con ciò ho
ho a stack

$$\begin{cases} S_i \geq \text{variabile di Slack} \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + S_i = b_i \end{cases}$$

equivalenti

Un sistema di m disuguaglianze con
 n variabili di surplus

x_i libera

S_i^+ , S_i^- due variabili positive non
negative

$$\begin{cases} s_i^+ \geq 0 \\ s_i^- \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_i = s_i^+ - s_i^-}$$

La diff
tra quest
2 variabili
 s_i^+
collegando
come una
variabile
di riserva

puo' assumere valori
positivi, negativi
o nulli.

$\Rightarrow$ Elimino X_i e sostituisco $(s_i^+ - s_i^-)$

Forma canonica $\rightsquigarrow$

$$Ax \leq b \xrightarrow[\text{Sepa}]{\text{Cambi}} -Ax \geq -b$$

Se invece ho

$$Ax = b$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

Scorro equazioni in questo modo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

equivalenti

equivalenti

$$\begin{cases} -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}$$

METODI ITERATIVI PER

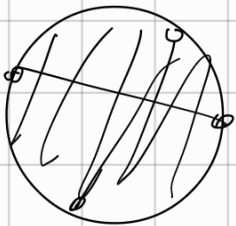
PROBLEMI ALGEBRA LINEARE

- Studiare geometricamente l'insieme ammissibile.

$$\min C^T x$$

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

X è un insieme convesso



$Ax = b$ è un insieme di equazioni
lineari
 $f_i(x) = 0$

$x \geq 0$ è un insieme di disequazioni:

$$g_j(x) \geq 0$$

lineari $\Rightarrow$

$g_j(x)$ è sempre
una funzione lineare

funzione lineare
che convessa

$C^T x$ è una funzione lineare

quindi è una funzione sia
convessa che concava.

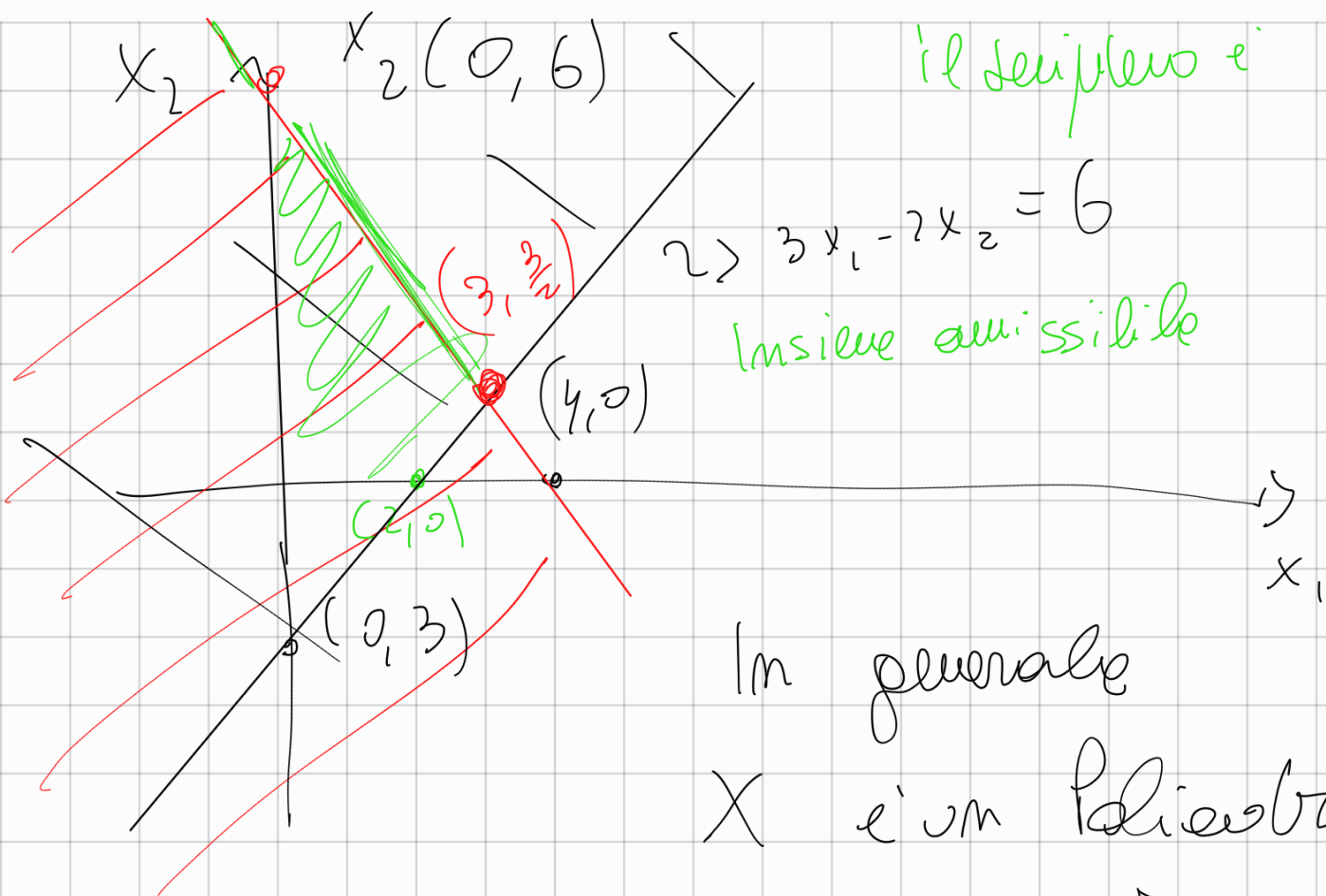
→ la PL è un caso particolare
di problema di ottimizzazione
convessa ($x \in \mathbb{R}^n$ convessi)

Insieme ammissibile di un
problema di PL.

• $\min -x_1 - x_2$

600000
in base stock

$$x \equiv \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \leadsto 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \leadsto 3x_1 - 2x_2 + s_2 = 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ s_1 &\geq 0 \\ s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



insieme convesso costituito da tratti
 di linee