

Versione recuperata guardavolo appunti prof
caricati: sull'internet

$$\min c^T x$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$c \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$b \in \mathbb{R}^m$$

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

POLIEDRO

$$\alpha \in \mathbb{R}^n \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Semispaio Affine

$$\alpha^T x \leq \alpha_0$$

Semispaio ~~indotto~~

$$\alpha^T x = \alpha_0$$

Definizione di Poliedro

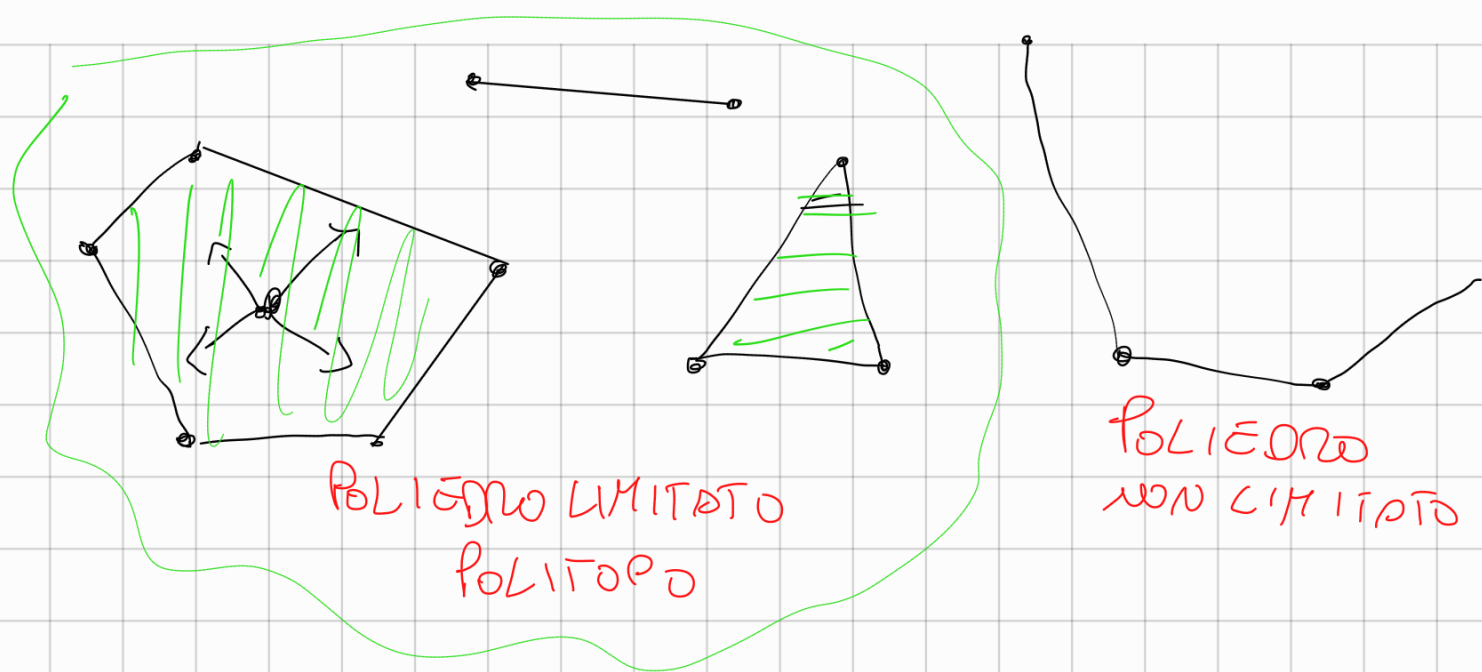
UN POLIEDRO E' DATO DALL'INTERSEZIONE

DI UN CERTO NUMERO DI SEMISPAZI

AFFINI E SEMISPAZI INDOTTI

$$X \equiv \begin{cases} Ax = b \rightarrow \text{l'insieme di semispazi} \\ \quad \quad \quad \text{indotti} \\ x \geq 0 \rightarrow \text{l'insieme di semispazi} \\ \quad \quad \quad \text{affini} \end{cases}$$

$\Rightarrow X$ e' un POLIEDRO



POLITOPO

Un poliedro P si dice POLITOPO se

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \|x\| \leq M, \forall x \in P$$

$$, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Vertice o Punto estremo di un POLIEDRO

Dato un poliedro P , un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice vertice o punto estremo se

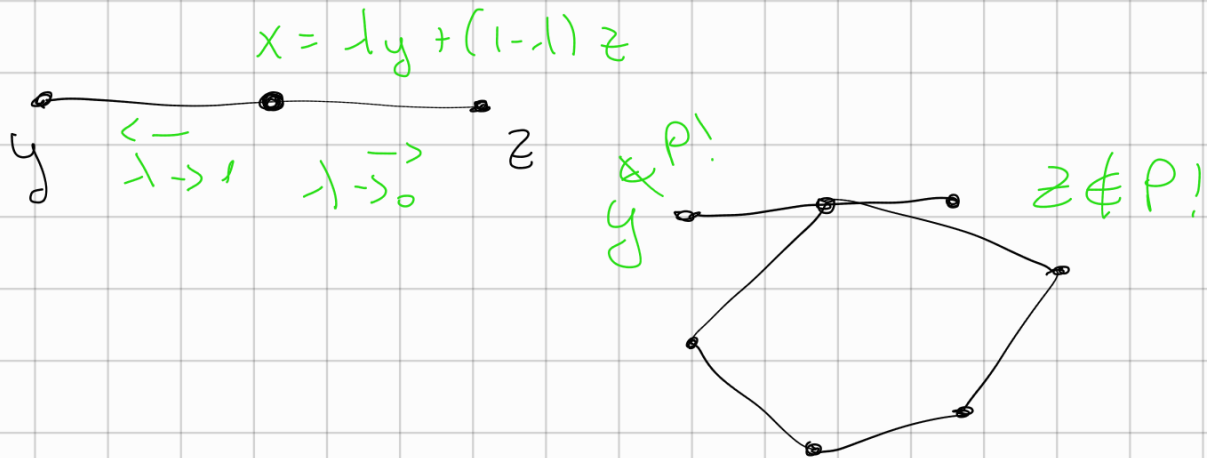
non è possibile esprimere x

come combinazione convessa STRETTA

di due punti del poliedro P

$\Rightarrow x \in P$, x è un vertice / punto estremo
 se $\nexists y, z \in P$ tali che

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \text{ con } \lambda \in (0,1)$$



Teorema di MINKOWSKI-WEYL

• Qualunque punto di un politopo P

(poliedro limitato) può essere

espresso come combinazione convessa

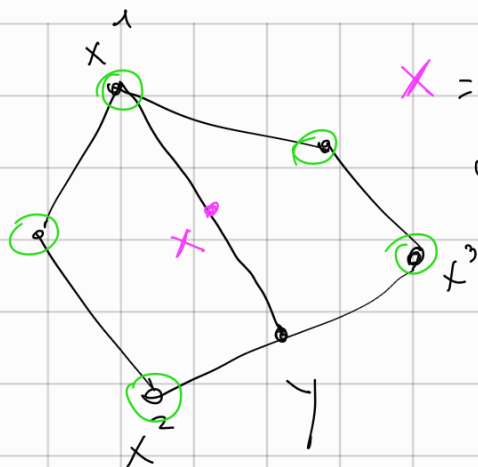
dei suoi vertici.



TH • Siano $x^1, x^2, \dots, x^k$ i vertici di P

$$\Rightarrow \forall x \in P \Rightarrow x = \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k \text{ dove}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0 \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$$



$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \\ y &= \varepsilon x^2 + (1-\varepsilon) x^3 \end{aligned} \right\}$$

PL $\min C^T x \quad x \in P$ con P poligono
(poliedro limitato)

Teorema

Sia dato un problema di PL cui l'insieme
ammissibile P è un poligono $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ sempre un vertice $x^* \in P$ soluzione
ottima del problema di PL.

Dim

Siano $x^1, x^2, \dots, x^k$ i vertici di P , $x^i \in \mathbb{R}^n$
 $i=1, \dots, k$

$$z^* = \min \{ C^T x^i : i=1, \dots, k \}$$

Per Teo Mink.-Weyl $\Rightarrow y = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k$
 $\Rightarrow y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$
con $\lambda_i, \lambda_2, \dots \geq 0 \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$

$$C^T y = C^T \cdot \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i \right) =$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \underbrace{C^T \cdot x^i}_{\text{valore}} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i z^* = z^* \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) = z^* \quad \text{// } 1$$

p. obl. nel
vertice x^i