

Problema di PL in forma

standard

$$\min c^T x$$

X è un poliedro.

$$X = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\min -x_1 - x_2$$

$$X = \begin{cases} \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases} \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; x_4 \geq 0 \end{cases} \quad Ax = b$$

$$(1) \quad x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 24 ; x_4 = 6$$

o.e. annulla x_3, x_4

Vertice $(0,0)$

$$(2) \quad x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$$

anulliamo x_2, x_4

$$x_1 = 3; x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{vertice} \left(3, \frac{3}{2}\right)$$

$$(3) \quad x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + x_3 = 24 & x_3 = 12 \\ 3x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Vertice} (2, 0)$$

$$(4) \quad x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 6 \\ -2x_2 + x_4 = 6 \Rightarrow x_4 = 18 \end{cases}$$

$$x_2 = x_3 = 0$$

$$\begin{cases} 6x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 = 6 \Rightarrow x_4 = -6 \end{cases}$$

non ho alcun vertice in questi punti non sono ammissibili perché x_4 è negativo

non appartiene al poliedro.

x è un poliedro.

$$\min C^T x$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$P \equiv \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{m equazioni con n incognite}$$

(raggio pieno)

H.p. sia A (1) $m \leq n$; (2) $\text{rank}(A) = m$

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \end{matrix} \quad m \geq m$$

Se annullo $n-n$ variabili, il

sistema $Ax = b$ diventa un sistema
di n equazioni in n incognite
(variabili)

quando ammette un'unica soluzione?
quando le colonne relative alle x_i
sono linearmente indipendenti,
 $\det A \neq 0$

$\Rightarrow$ Se le righe o le colonne
relative ai coeff. delle variabili
sono linearmente indipendenti,
il sistema ammette un'unica soluzione,
(altrimenti non ammette soluzione)

$Ax = b$

Colonna associata alla variabile x_i

$A = (A_1^{x_1}, A_2^{x_2}, \dots, A_n^{x_n})$

$\hookrightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = b$

Se quello è un sistema $m \times m$ variabili

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 \dots + A_m x_m; \quad x_{m+1} = \dots = x_{m-m} = 0$$

Se le colonne $A_1, A_2 \dots A_m$ sono lin.

indip. $\Rightarrow$ il sistema ammette una unica soluzione

$$A \in \mathbb{R}^{m \times m} \Rightarrow A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$$

$$M.p. \ m \leq n \quad \text{rg}(A) = m$$

Base della Matrice A

Insieme di m colonne linearmente
indipendenti di A.

$$\text{min} \quad -x_1 - x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \end{array} \right\} Ax = b$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \dots x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

B è una base di A se formato
da 2 colonne linearmente indipendenti

Se annullo $n-m$ variabili in modo tale che
le colonne associate alle variabili non
nulle sono lin. indep.,

posso calcolare in modo univoco il valore
delle variabili non nulle.

E,

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}_{A_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{A_2} x_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} *$$

$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ è una base di A perché
 A_1 e A_2 sono lin. indip.

→ il sistema ammette un'unica soluzione

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad (x_3 = x_4 = 0)$$

$$Ax = b$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\forall p, m \leq n$$

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$\forall k(A) = m$$

Se abbiamo $m \times m$ vettori in modo tale che le
colonne di A associate alle variabili non nulle

sono lin. indip., allora il sistema

$Ax = b$ ammette una unica soluzione

* Tali colonne formano una base B

della matrice A

$$B \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \right)$$

Sia B una base della matrice A

$$B = \begin{pmatrix} A_{\beta(1)} & A_{\beta(2)} & \dots & A_{\beta(m)} \end{pmatrix}$$

$x_{\beta(1)} \quad x_{\beta(2)} \quad \dots \quad x_{\beta(m)}$
 m colonne di A
 linearmente indep.
 Variabili in base

• $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \setminus \{x_{\beta(1)}, x_{\beta(2)}, \dots, x_{\beta(m)}\}$
 sono chiamate **variabili fuori base**
 e tutte le altre variabili sono quelle nella base

• $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \setminus \{A_{\beta(1)}, A_{\beta(2)}, \dots, A_{\beta(m)}\}$

sono chiamate **colonne fuori base**

• $\{A_{\beta(1)}, A_{\beta(2)}, \dots, A_{\beta(m)}\}$ sono **colonne in base**

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n) = (B : F)$$

B $\rightarrow$ colonne in base
 F $\rightarrow$ colonne fuori base

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \text{variabili in base} \\ \text{variabili fuori base} \end{matrix} = \begin{pmatrix} x_{\beta(1)} \\ x_{\beta(2)} \\ \vdots \\ x_{\beta(m)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- $x_B \in \mathbb{R}^m$
- $x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$

Restanti
n-m
variabili
fuori base

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} B & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Bx_B + Fx_F = b \quad F \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$$

$$\Rightarrow B \text{ base di } A \Rightarrow \det(B) \neq 0 \Rightarrow$$

B è invertibile

$$\Rightarrow \exists B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^{(e)} \quad \leftarrow \text{inversa di } B$$

moltiplico

$$B^{-1} (Bx_B + Fx_F) = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow x_B + B^{-1}Fx_F = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow x_B = -B^{-1}Fx_F + B^{-1}b$$

• Se anche le n-m variabili fuori

base $\Rightarrow$ determinante in modo

unisco le variabili in base

$$(X_F = 0) \quad * \Rightarrow \boxed{X_B = B^{-1} b}$$

✓ ✓ ✓ ✓

After Pausa

$$A x = b$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m & \times & n \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 4 \end{matrix}$$

Base B sono 2×2

Pseudo

$$(A_1 \ A_2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{è una base B di A}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

come risolvere
come

Partizionamento Matrici e Vettori

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Fx_F = b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(-24)} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_B + B^{-1} F x_F = B^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(-\frac{1}{24}\right) \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x_F} =$$

$$= -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} \underbrace{\left. \vphantom{\begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}} \right\}}_{B^{-1} b}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \underbrace{\left. \vphantom{\begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}} \right\}}_{B^{-1} b}$$

Se anche $x_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = B^{-1} b$$

• Soluzione DI BASE

• Dato il poliedro

$$P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$M_p \quad m \leq n$$

$$\text{rank}(A) = m$$

• Sia B una base della matrice A

$$(B \in \mathbb{R}^{m \times m}) \quad \text{la soluzione in}$$

$$\text{cioè} \quad X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si dice soluzione di base relativa alla base B .

Tale soluzione per definizione ~~soddisfa~~

il sistema $Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Fx_F = b$

ma potrebbe non soddisfare

la condizione $x \geq 0$

SOLUZIONE DI BASE
AMMISSIBILE

Una soluzione di base si dice
ammissibile quando

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Soddisfa
anche la
non negatività

$$\Leftrightarrow B^{-1}b \geq 0$$

$$\in P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

è un punto ammissibile
del poliedro.

es. di prima

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è soluzione di
base ammissibile

Se $B^{-1}b$ ha qualche componente nulla

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} \text{ si dice soluzione di base degenera.}$$

Abbiamo una corrispondenza tra
base ammissibile e vertici del poliedro.

Problema di PL in forma standard

$$\min c^T x$$

$$P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Teorema

Un punto $x \in P$ è un vertice (o punto estremo)

$\Leftrightarrow$ x è una soluzione di base

ammissibile

DIP

HP x è sol. di base ammissibile.

Th. x è un vertice

$\Leftarrow$

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b \geq 0$$

$$x_B \in \mathbb{R}^m$$

$$x_F \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Sia $k \leq m$ il # di component. $\neq 0$ di $x_B = B^{-1}b$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ \vdots \\ x_k > 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ \vdots \\ x_k > 0 \end{matrix} \right\} x_B \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} x_F \end{matrix}$$

Per assurdo supponiamo che X non sia

un vertice $\Rightarrow \exists y, z \in P$ tali che

possiamo sempre scrivere x come comb. convessa

$$X = \lambda y + (1-\lambda)z \quad \text{con } \lambda \in (0,1)$$

$$y, z \in P \Rightarrow \begin{cases} Ay = b \\ y \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} Az = b \\ z \geq 0 \end{cases}$$

combinazione
convessa

$$X = \underbrace{\lambda}_{\substack{\geq 0 \\ \leq 1}} y + \underbrace{(1-\lambda)}_{\substack{\geq 0 \\ \leq 1}} z \quad \lambda \in (0,1)$$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$(1) \quad A y = b \Rightarrow A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_k y_k = 0$$

$$(2) \quad A z = b \Rightarrow A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_k z_k = 0$$

Per ipotesi $y \neq z$ altrimenti x non potrebbe essere espresso come combinas. convenga ~~stretta~~

Sottragg. equos. 2 da equos. 1

$$(1) - (2) = A_1 \underbrace{(y_1 - z_1)}_{a_1} + A_2 \underbrace{(y_2 - z_2)}_{a_2} + \dots + A_k \underbrace{(y_k - z_k)}_{a_k} = 0$$

poiché $y \neq z$ $a_1, a_2, \dots, a_k$ non sono tutti nulli.

$\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_k$ sono linearmente dipendenti.

ASSUNDO perché sono colonne di una base !!

• Hp. x è un vertice di P

$\Rightarrow \exists t \in [0, 1]$ x è conv. di base ammissibile

$A_x = b$ m equazioni, n variabili.

Annullando n-m variabili, e

meno di condizioni semplici,

ricavo in modo univoco le altre

m variabili.

$\Rightarrow$ un vertice può avere al max m
componenti $\neq 0$

Supponiamo quindi che X abbia

$k \leq m$ componenti $\neq 0$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_k > 0 \\ \text{con } k \leq m \end{array}$$

Per assurdo

Supponiamo che X non sia

Soluzione di base ammissibile

$\Rightarrow$ le colonne $A_1, A_2, \dots, A_k$ associat

a $x_1, x_2, \dots, x_k$ rispettivamente devono essere lin. dipendenti $\Rightarrow$

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = 0$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli.

Poiché x è un vettore $\Rightarrow x \in P$

$$\Rightarrow Ax = b \Rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k = b$$

ora sotto insieme le due condizioni:

$$(1) A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k = b$$

$$\varepsilon x (2) A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \dots + A_k \alpha_k = 0$$

$\varepsilon > 0$

$$(1) + \varepsilon (2) \Rightarrow A_1 \underbrace{(x_1 + \varepsilon \alpha_1)}_{y_1} + A_2 \underbrace{(x_2 + \varepsilon \alpha_2)}_{y_2} + \dots + A_k \underbrace{(x_k + \varepsilon \alpha_k)}_{y_k} = b$$

$$(1) - \varepsilon (2) \Rightarrow A_1 \underbrace{(x_1 - \varepsilon \alpha_1)}_{z_1} + A_2 \underbrace{(x_2 - \varepsilon \alpha_2)}_{z_2} + \dots + A_k \underbrace{(x_k - \varepsilon \alpha_k)}_{z_k} = b$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Ay = b \\ Az = b \end{cases}$$

$\downarrow$
 Soddinhero
 $Ax = b$

vedi
 ① e ②
 vedi
 ① e ②

Se ϵ scelto è sufficientemente piccolo,

$$\Rightarrow y_1, \dots, y_k \geq 0, \quad z_1, z_2, \dots, z_k \geq 0$$

$$\Rightarrow y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

due punti non
 separati da Soddinhero
 il problema. Sono
 punti del poliedro

$$\Rightarrow y, z \in P$$

avremo detto che x non fosse

ammissibile, ASSUNDO

$$x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z \quad \text{L'idea è:}$$

x può essere espresso come combinazione

convessa diretta di $z, y \in P$

ASSUNDO
Un vertice

perde - x e'
per ipotesi.