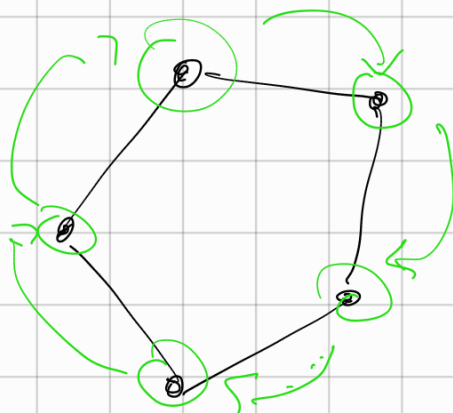


Algoritmo Per Soluzione Simplex PL1

$$\min C^T x$$

$$P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Trovo un vertice, vedo se è ottimo e
passo al successivo, esploro tutti i vertici;
Controlla tutte le soluzioni di
base ammissibili: ma non è molto
efficiente, i vertici possono essere
moltissimi.

$$P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{matrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$[X \text{ è vertice} \Leftrightarrow X \text{ è soluzione di base ammissibile}]$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

\$x\$ variabili
fori base

dove \$B\$ è una base invertibile di \$A\$,

$$\text{cioè } B^{-1}b \geq 0$$

\$A \in \mathbb{R}^{2 \times 5}\$ \$m=2\$, \$n=5 \Rightarrow\$ una base \$B\$ di
 da \$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\$ formata
 da \$m=2\$ colonne di \$A\$
linearmente indipendenti.

trovare tutti i vertici di \$P\$

$$B = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A_1, A_2 \text{ lin indep}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; X_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B \text{ è una base di } A$$

$$X_B = B^{-1}b$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\$1/2\$

$$X_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \not\geq 0 !!$$

\$X_B\$ non
 è una sol.
 di base ammissibile

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{non e' soluzio} \\ \text{di base} \\ \text{ammissibile non} \\ \text{e' un vertice di} \end{array}$$

$\Rightarrow B = (A_1, A_2)$ non e' una base
ammissibile

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ x_1 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b \\ x_f = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

A_1 e A_3 lin indip.

$\Rightarrow B$ e' una base di A

$$A_x = b \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4 \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$\bullet B$ e' una base ammissibile $\leftarrow x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e' soluzione ammissibile di base, ovvero
un vertice di P

$$B = (A_1, A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1, A_4 \text{ sono lin. dipendenti}$$

$\Rightarrow B$ non e' base di A

$$B = (A_1, A_5) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_1, A_5 \text{ lin. indep.}$$

$\Rightarrow B$ e' una base di A

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b; \quad X_b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_x = b \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_5 = 4 \\ x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

$$B^{-1}b \geq 0$$

$\Rightarrow B$ e' base ammissibile

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ \cdot \\ X_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ \cdot \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e' un vertice di } P$$

$$B = (A_2 \ A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B \text{ è una base di } A$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1} b; \quad x_h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A x = b = \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} v_1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow B \text{ è una base ammissibile, } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo ritrovato le
vertici già trovate
prima

è un vertice

Quando $B^{-1} \cdot b$ la base si sgo-
deperene, e la soluzione è degenera
anch'essa

(B è degenera)

$$B = (A_2 \ A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A_2 e A_4 lin indip $\Rightarrow B$ è base di A

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1} b; \quad X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$A x = b \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 3x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2 \\ -x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -2 < 0 \end{cases}$$

B non è base ammissibile,
e quindi non è un vertice

$$B = (A_2 \ A_4) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B \text{ base ammissibile}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1} b \quad X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

uso sistema di eq.

$$A x = b \Rightarrow \begin{cases} x_2 - 2x_5 = 4 \\ -x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \quad x_5 = -6$$

B non è base ammissibile e non è
un vertice di P

$$B = (A_3 A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad x_B \text{ degenera}$$

B è una base ammissibile

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è un vertice di } P$$

B è base degenera perche' $\boxed{x_4 = 0} \Rightarrow x$
è l'insieme di base ammissibile degenera

$$B = (A_3 A_5) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow B$ è una base ammissibile...

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è un vertice } \dots$$

B è base degenera

(Base usata per la 4^a volta)

$$B = (A_4 A_5) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B \text{ base di } A$$

$$x_B = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{è un vertice di } P$$

PROBLEMI DI MISCELAZIONE

- Sostanze n $j = 1, \dots, n$
- Elementi utili m $i = 1, \dots, m$
- a_{ij} la quantità di elemento utile i presente in una unità di sostanza j
- b_i quantità minima di elemento utile i che dovrà essere presente nella miscela di sostanze.
- C_j il costo unitario della sostanza j

PROBLEMA: determinare la quantità di sostanze nella miscela in modo tale che ogni elemento utile sia presente in una quantità pari o superiore a b_i e che il costo complessivo della miscela sia minimo.

Voglio scrivere un problema di miscelazione in un

X_j = quantità di sostanza j in serbo nella miscela

• $\min \sum_{j=1}^n C_j X_j$

• $\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$ ~ quantità di elemento utile i se utilizzato nella miscela X_j uniti di sostanza j

quantità totale di elementi utili...

• $X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$

Vincoli lineari dati da assunzioni, il modello può anche essere non lineare.