

UN ALGORITMO PER RISOLVERE PROBLEMI DI PL

$$\min c^T x$$

$$P \equiv \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

FORMA STANDARD

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m \leq n$$

$$\text{rank}(A) = m$$

METODO DEL SIMPLESSO

Idea: Enumerare tutti i vertici del poliedro P (ovvero le soluzioni di base ammissibili di A) ed individuare la soluzione di base ammissibile (ovvero il vertice) che minimizza la funzione obiettivo $c^T x$.

• Enumerare tutte le basi B di A

$\Rightarrow$ base B : è una collezione di

m colonne linearmente indep.
di A. le SBA sono molte...

=> Devo enumerare tutte le
"collezioni" di m colonne
di A

=> $\binom{n}{m} \leadsto$ # massimo di
basi B di A

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} \gg 0!!$$

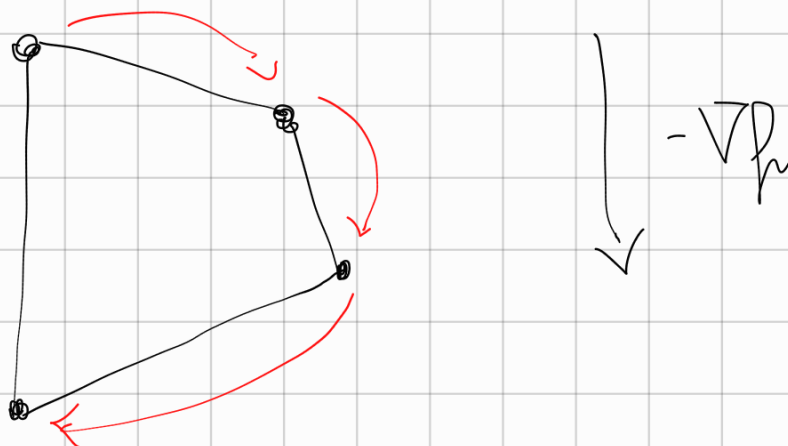
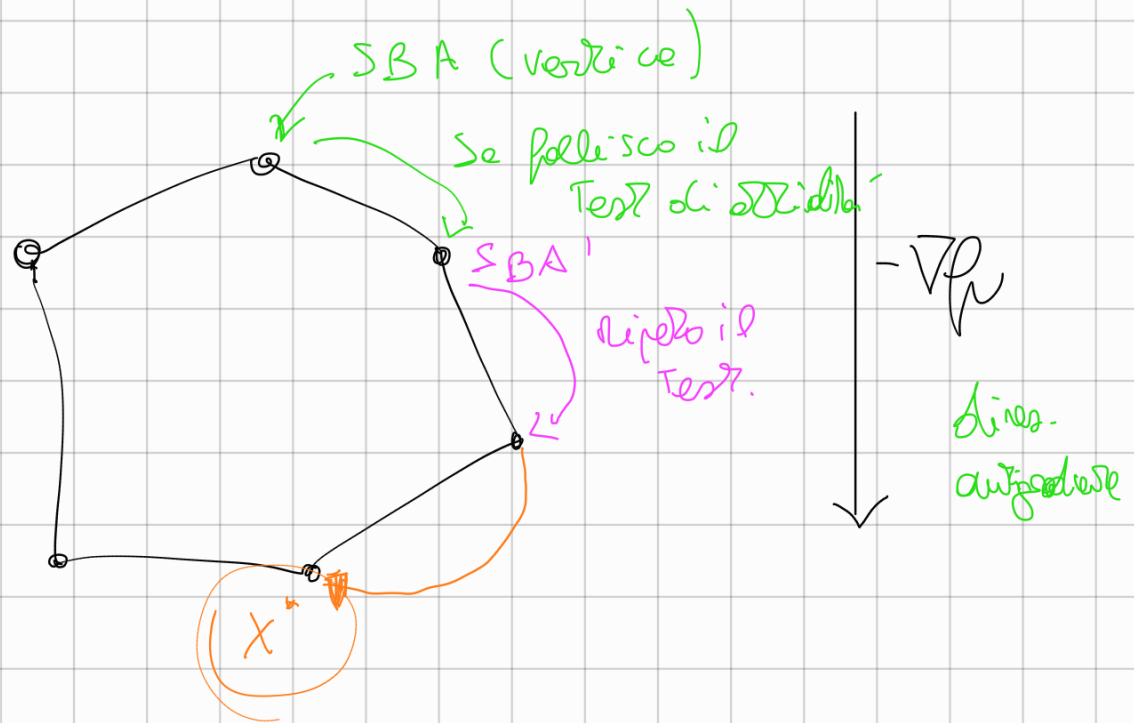
e controllare che $B^{-1}b \geq 0$
affinché sia
ammissibile

milionario questo algoritmo
poco efficiente (è una mossa)

Componenti migliorative

① Test di OTTIMALITÀ: Permette
di controllare se una soluzione
di base ammissibile (vertice)
è ottima.

2) Un modo per passare da una
 soluzione di base ammissibile
 non ottima ad una "vicina"
 con valore della funzione
 obiettivo $C^T x$ non peggiore
 (maggiore) della precedente



• Nel caso peggiore il metodo del
 Simplex deve visitare tutti i
 vertici (SBA) del poliedro e
 quindi Termina dopo al
 massimo $\binom{n}{m}$ iterazioni:
 coeff. binomiale

TEST DI OTTIMITÀ

pu verificarsi se
 la SBA è ottimale
 o no

$$\min C^T x$$

$$\text{Sia } B \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

una base ammissibile di
 A .

$\Rightarrow$ La soluzione di base ammissibile
 associata a B è

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{ammissibile}$$

$(B^{-1}b \geq 0)$

voglio capire se questo vertice è ottimo

O no, risolvo il problema come

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ x_B & x_F \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_B \\ C_F \end{pmatrix}$$

partiziono
anche C

Problema risolto

$$C = \begin{pmatrix} C_B \\ C_F \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\bullet \min C_B^T x_B + C_F^T x_F$$

$$\bullet B x_B + F x_F = b$$

$$x_B \geq 0 \quad x_F \geq 0$$

$$\bullet B \text{ è una base} \Rightarrow \exists B^{-1}$$

risolvo il problema nelle var. lib. fuori base

posso moltiplicare
per B^{-1}

$$B x_B + F x_F = b \Rightarrow B^{-1} B x_B + B^{-1} F x_F = B^{-1} b$$

$$\Rightarrow x_B + B^{-1} F x_F = B^{-1} b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = \overbrace{B^{-1} b}^{\text{costante}} - B^{-1} F x_F$$

$\Rightarrow$ Data una base B di A , posso

esprimere x_B in funzione di x_F

var. lib. fuori base

$$\hookrightarrow C^T x = C_B^T x_B + C_F^T x_F =$$

sostituisco

$$= C_B^T (B^{-1} b - B^{-1} F x_F) + C_F^T x_F$$

Calcolo solo x_F

$$= \underbrace{C_B^T B^{-1} b}_{\text{Terme costante}} + \underbrace{(C_F^T - \underbrace{C_B^T B^{-1} F}_{\bar{C}_F^T})}_{\text{ho eliminato le variabili di base e ho scritto tutto in funzione delle variabili fuori base.}} x_F$$

ho eliminato le variabili di base e ho scritto tutto in funzione delle variabili fuori base.

↳
Vettore dei costi ridotti:
associati alle variabili fuori base

B è una base ammissibile

$$\Rightarrow \text{SBA} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Sol. base ammiss.

fun. obiettivo nello SBA associata alla base B

$$C^T x = C_B^T x_B + C_F^T x_F = C_B^T B^{-1} b + 0 = C_B^T \underbrace{B^{-1} b}_{x_B}$$

TEST DI OTTIMALITÀ

valore della f. obj
nello SBA associato
alla base B

è la parte costante della f. obj
quando viene espressa in fun. delle variabili
di base

Teorema

Sia B una base ammissibile di A .

Se il vettore dei costi ridotti:

$$\bar{C}_F^T = C_F^T - C_B^T B^{-1} F \geq 0, \text{ allora}$$

$\Rightarrow$ la soluzione ammissibile di

$$\text{base } X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

è soluzione ottimale per il problema di PL (in forma standard).

Se $\bar{C}_F^T \geq 0$, X è sol. ott.

è p. ammissibile
e in funzione delle
variabili
fuori base

DIM.

Dimostrare che il valore della f. obb. valutata in x non potrà essere inferiore a f. obb. valutata nella SBA B

punto ammissibile qualsiasi

$$\forall x \in P = \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow C^T x = C_B^T x_B + C_F^T x_F$$

$$= C_B^T B^{-1} b + \underbrace{(C_F^T - C_B^T B^{-1} F)}_{\text{costo ridotto}} x_F$$

risultato in f. delle variabili fuori base

VI il teo. di
O dice che è
 ≥ 0

VI

O
punto
ammissibile

Se almeno
questo termine
diventa un $\geq$

$$\Rightarrow C^T x \geq C_B^T B^{-1} b$$

$\leftarrow$ Se almeno i termini $\geq 0, \dots$

valore della
f. obb. nel punto
 $x \in P$

valore della
f. obb. nella sol. di base ammissibile

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

qualsiasi punto x
ha valore $\geq$ della f.
valutata nell'SBA

Se ho una SBA con costi ridotti ≥ 0 ,
allora tutti i valori della f.

seno supre $\geq$ obl valore f. obl valle

SBA, quindi X è soluzione ottimo per il problema di PL

vediamo con un esempio

$$\min -x_1 - x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la base

$$B = \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Disordinato rispetto im fns. delle variabili. fuori base

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F$$

$$C^T x = C_B^T B^{-1}b + (C_F^T - C_B^T B^{-1}F) x_F$$

Problema in
forma canonica
rispetto la

base B

$$\begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \\ C^T x = -x_1 - x_2 = \underbrace{C_B^T B^{-1} b}_0 + \underbrace{\bar{C}_1}_{-1} x_1 + \underbrace{\bar{C}_2}_{-1} x_2 \end{cases}$$

costi ridotti
delle variabili fuori base

$$\bar{C}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow \boxed{\text{SBA NON È OTTIMA}}$$

mi posto ad un data SBA
migliorarlo o peggiorarlo il valore
della F. ob.

$C^T x = 0$ f. ob. in
SBA

$$\begin{cases} C^T x = -x_1 - x_2 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \\ x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

Indice
Scrittura
in F
canonica

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se aumento le variabili
fuori base ad un valore positivo, la
funzione ob. diminuisce

data la base B corrente

$\Rightarrow$ Se aumento una variabile fuori base
con costo ridotto negativo, la

funzione ob. si cresce

idea: prendo una variabile
fuori base e la aumento

vincoli: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

aumento x_1 e/o x_2 x_3 e x_4 cambiano

• Aumentiamo x_1 e manteniamo $x_2 = 0$

Massimo aumento di x_1 :

$$\begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \geq 0 \Rightarrow 24 - 6x_1 \geq 0 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \geq 0 \Rightarrow 6 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq 4 \quad \boxed{x_1 \leq 2} \quad \text{massimo incremento di } x_1$$

$$\text{Quando } x_1 = 2 \quad (x_2 = 0) \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 12 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$$

= > Soluzione ammissibile con valore

della f. ob. $= -2 < 0 \rightarrow$ valore della SBA di partenza
 x_1 è entrato in base con valore 2
 x_4 è uscito dalla base con valore nullo.

After pass
 FORMALIZZAZIONE

B base ammissibile di A

$$\text{SBA} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

non ottimale $\Rightarrow$ $c_F^T = (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) \begin{pmatrix} \text{non zero} \\ \geq 0 \end{pmatrix}$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Fx_F = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F$$

$$C^T x = C_B^T B^{-1}b + \bar{C}_F^T x_F$$

Problema in
Forma
canonica
rispetto a
 B

• Sia $\bar{C}_h$ il costo ridotto della variabile fuori base x_h e sia $\bar{C}_h < 0$

[idea: aumentare x_h il più possibile mantenendo le altre variabili fuori base a 0]

$$x_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_h \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1} \overbrace{F x_F}^{A_h \times h} =$$

della matrice F quadrata
solo il termine che moltiplica
 x_F

$$= B^{-1}b - B^{-1} A_h x_h \quad \text{la } h\text{-esima riga}$$

$$B = \begin{pmatrix} A_{\beta(1)} & A_{\beta(2)} & \dots & A_{\beta(m)} \\ x_{\beta(1)} & x_{\beta(2)} & & x_{\beta(m)} \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{\beta(1)} \\ x_{\beta(2)} \\ \vdots \\ x_{\beta(m)} \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{R}^m \\ \geq 0 \end{matrix} \quad B^{-1}A_h = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \bar{a}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}A_h x_h \quad \Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_B(1) = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1h} x_h \geq 0 \\ X_B(2) = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2h} x_h \geq 0 \\ \vdots \\ X_B(m) = \bar{b}_m - \bar{a}_{mh} x_h \geq 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{altrimm.} \\ \text{valore} \\ \text{non} \\ \text{ammissib.} \end{array} \right\}$$

Aumentando x_h il più possibile in modo che le variabili in queste espressioni non negative

$$\textcircled{A} X_B(i) = \bar{b}_i - \bar{a}_{ih} x_h \geq 0$$

Due casi

$$(1) \quad a_{ih} > 0 \Rightarrow x_h \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} \quad \geq 0$$

$$(2) \quad a_{ih} \leq 0 \Rightarrow \underbrace{\bar{b}_i}_{\geq 0} - \underbrace{a_{ih}}_{\leq 0} \underbrace{x_h}_{\geq 0} \geq 0$$

Allora (A) è sempre soddisfatta

$$\forall x_h \geq 0$$

$\Rightarrow$ il valore massimo di x_h :

$$\frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}} \quad v = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}}, \forall i \text{ tale che } \bar{a}_{ih} > 0 \right\} \quad (i=1, \dots, m)$$

$\hookrightarrow$ minimo valore che posso avere, così posso soddisfare tutte le diseg. ≥ 0

Porto x_h al valore massimo

Alimento x_h da 0 $\rightsquigarrow v = \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}}$

$$\Rightarrow C^T x = C_B^T B^{-1} b + \bar{C}_F^T x_F =$$

$$= C_B^T B^{-1} b + \underbrace{\bar{C}_h}_{\geq 0} x_h = C_B^T B^{-1} b + \bar{C}_h \cdot v$$

$\Rightarrow$ la funzione obb. decresce col

valore $\bar{c}_h \cdot v$

x_h quindi entra nelle variabili di base
ma al suo posto una variabile di base
passa fuori dalla base

Esce la variabile che definisce
 β .

$$\begin{cases} x_B(t) = \bar{b}_t - \bar{a}_{th} x_h \\ x_h = v = \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}} \Rightarrow x_B(t) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_h$ "entra" in base "col valore

$$v = \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}} \quad \text{e} \quad x_B(t) \text{ "esce"}$$

dalla base " con il valore $\emptyset$

ANNO

"entra" in base la colonna A_h

"esce" dalla base la colonna $A_B(t)$

$\Rightarrow$ colonna riferita
all'h-esce
variabile di
base

$$B = \begin{pmatrix} A_{\beta(1)} & A_{\beta(2)} & \dots & A_{\beta(t)} & \dots & A_{\beta(m)} \end{pmatrix}$$

base da cui eravamo partiti
 $x_{\beta(1)}$ $x_{\beta(2)}$ $x_{\beta(t)}$ $x_{\beta(m)}$

$$F = (\dots A_h \dots) = A \setminus B$$

Ottengo una nuova base $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\tilde{B} = (A_{\beta(1)} \quad A_{\beta(2)} \quad \dots \quad A_h \quad \dots \quad A_{\beta(m)})$$

$\tilde{B}$ è una nuova base di A !

$$B^{-1} \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{1h} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{2h} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{th} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{mh} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ colonna in posizione t

$$B^{-1} A_h = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \bar{a}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{pmatrix}$$

$$\det(B^{-1} \tilde{B}) = (-1)^{t+h} \cdot \bar{a}_{th}$$

Teo. di Binet

il cambio di base, facendo entrare A_h nella base, la nuova $\tilde{B}$ sarà rispetto a base di A

$$\det(C \cdot D) = \det(C) \cdot \det(D)$$

$$\Rightarrow \det(B^{-1} \tilde{B}) = \det(B^{-1}) \cdot \det(\tilde{B}) \neq 0$$

perdo $\neq 0$
 B
 e: una base

lo sono
 anche lui
 $\neq 0$

$$\Rightarrow \det(\tilde{B}) \neq 0 \Rightarrow \tilde{B} \text{ è una base di } A!!$$

OPERAZIONE DI PIVOT

Consiste nel far entrare la (x_h)

colonna A_h e far uscire dalle

base la colonna $A_{\beta(t)}$ ($x_{\beta(t)}$)

otengo dunque un nuovo vertice. Applico il test di ottimalità

Cosa succede se ho che, assegnando A_h ,
 sono sempre ≤ 0 ? x_h allora può crescere
 all'infinito, e v non esiste più, sono $+\infty$,
 e la funzione obj. Scenderà a $-\infty$.

Se ciò avviene, abbiamo prob. di discendere sempre
 ammissibile,



$v \rightarrow +\infty$, la h
 obj. scende
 all'infinito

Problema illimitato

olivos. per cui posso sempre decrescere

• Se $\bar{a}_{ih} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, \beta(m)$, ovvero se

$$B^{-1} A_h = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \bar{a}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\Rightarrow x_{\beta(i)} = \bar{b}_i - \bar{a}_{ih} x_h \geq 0$$

$$\forall x_h \geq 0 \\ \text{per } i = 1, \dots, m$$

$\Rightarrow x_h$ può crescere all'infinito
rimanendo nella regione ammissibile
(poliedro)

NON HO UN BILITOPPO

$$\Rightarrow \underline{C^T x} \rightarrow -\infty$$

Problema
illimitato

nel problema di min.

NUOVA BASE

$$B = (A_1, A_3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = (A_2, A_4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = B^{-1} b \geq 0!$$

$$X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivo il problema in forma canonica
rispetto alla nuova base B

$$\begin{cases} x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \rightarrow x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = 24 - 6x_1 - x_2 \rightarrow x_3 = 24 - 6\left(2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) - x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = 12 - 8x_2 + 2x_4$$

Ho scritto x_1, x_3 in funzione delle var. fuori base

$$\begin{aligned} C^T x &= -x_1 - x_2 = -\left(2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) - x_2 = \\ &= -2 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \end{aligned}$$

nuova forma canonica

$$\begin{cases} C^T x = -2 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = 12 - 8x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

Problema in forma
canonica rispetto alla
nuova base $B = (A_1, A_3)$

$$= \underbrace{C_B^T B^{-1}}_{\text{nuovi valori della f. obj. nella nuova base di base}} b + \bar{C}_2 x_2 + \bar{C}_3 x_4$$

nuovi valori della
f. obj. nella nuova
base di base

costi ridotti relativi fuori base

$$\bar{C}_2 = -\frac{5}{3} < 0 !!$$

$$\bar{C}_3 = \frac{1}{3} > 0$$

$\Rightarrow$ SBA non è ottima

Dev rifare pivot