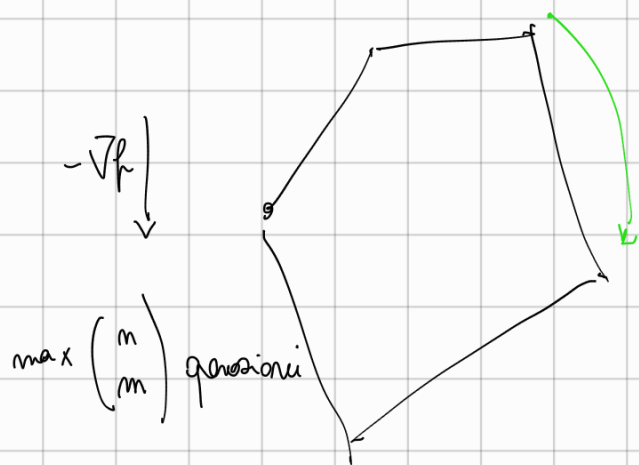


Metodo del poliedro:



$$\bar{c}_F^T = c_F^T - c_B^T B^{-1} F$$

Se variabile dei vincoli è zero,
ci fermiamo, siamo PIVOT
in cui valutiamo l'ottimalità

Dato B base ammissibile di A .

B è soluzione ammissibile di base.

Si dicono DEGENERI se $x_B = B^{-1} b$ ha qualche
componente nulla

SBA

$$X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

• Allo stesso vertice possono corrispondere

diverse basi: B e SBA

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = (A_1, A_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

②

$$B = (A_2, A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ $B = (A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

base separati e sol. di base separati

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vertice

B_1

B_2

B_3

SBA'

SBA^{uL}

SBA^{uL}

otto sono vertici
corrispondenti a

non ammissibili

FENOMENO

DI CICLAGGIO

non accettare e separare

Si può entrare?

REGOLA ANTICICLAGGIO DI BLAND

• Ogni volta in cui si può scegliere, scegliere la variabile x_h da far entrare in base

con indice " h " minimo, scegliere la variabile

$x_p(t)$ da far uscire dalla base con indice

$\beta(t)$ minimo

• In particolare, se ho più variabili fuori

base $\bar{x}_h : \bar{c}_h < 0 \Rightarrow$ faccio entrare in base la variabile con indice "h" minimo.

- Se ho più variabili in base $x_B(t) \in c.$

$\theta = \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}}$ e' l'incremento max della variabile x_h

$\Rightarrow$ esce dalla base la variabile $x_B(t)$ con indice $\bar{a}_{\beta(t)}^h$ minimo.

$\Rightarrow$ Il metodo del simplex termina dopo al più $\binom{n}{m}$ iterazioni.

Metodo del SIMPLEX
della Qualità

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

un vertice x è ottimo se

① è soluzione di base ammissibile

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

② ~~solipa~~ il test di ottimalità

$$\bar{c}_F^T = c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

6

Data una base B ammissibile di A

$$c^T = (c_B^T \mid c_F^T)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix}$$

$$A = (B \mid F)$$

considero la seguente espressione equivalente

$$\bar{c}^T = (\bar{c}_B^T \mid \bar{c}_F^T) = c^T - c_B^T B^{-1} A =$$

$$= (c_B^T \mid c_F^T) - c_B^T B^{-1} (B \mid F) = (c_B^T \mid c_F^T) -$$

costi ridotti delle variabili

$$- (c_B^T \mid c_B^T B^{-1} F) = \begin{pmatrix} 0 \mid c_F^T - c_B^T B^{-1} F \end{pmatrix}$$

i costi ridotti delle variabili in base sono sempre nulli

$\bar{c}_F^T$ fuori base

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema Duale

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T v \\ \text{s.t.} \quad & A^T v \leq c \end{aligned}$$

Data una base B ammissibile, la $S_B A$ associata e
ottimo di

① $x^* = \begin{pmatrix} x_B \\ -\frac{x_B}{x_F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow C^T x^* = C_B^T B^{-1} b$
(valori sotto R ob. nella SBA x^)*

② $\bar{C}^T = C^T - C_B^T B^{-1} A \geq 0^T$ *Test di ottimalità*

Se pongo $U^* = C_B^T B^{-1}$ $U^* \in \mathbb{R}^m$

① $\Rightarrow C^T x^* = U^{*T} b = b^T U^*$ *Validità forte*
condizione di ottimalità per i problemi primali e duali

② $\bar{C}^T = C^T - U^{*T} A \geq 0^T \Leftrightarrow C - A^T U^* \geq 0 \Leftrightarrow A^T U^* \leq C$
*Ammissibilità
 problema dual*

Sensibilità delle soluzioni ottime alle variazioni dei parametri di un problema di PL

(dati)
 $\min C^T x$
 $Ax = b$
 $x \geq 0$

Sia B ammissibile e ottimo

~~SBA~~
~~Attiva~~ $x^* = \begin{pmatrix} x_B \\ -\frac{x_B}{x_F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

1) $B^{-1}b \geq 0$ *condiz. ammissibilità*

2) $\bar{C}_F^T = C_F^T - C_B^T B^{-1} F \geq 0$ *condiz. di ottimalità*

Variazioni solubili dei termini noti b

$b \rightsquigarrow b + \Delta b = (b_1 + \Delta b_1)$ *Variaz b_1*

$$\begin{pmatrix} b_2 + \Delta b_2 \\ \vdots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix}$$

① Cardinale

$$1) B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

2) non vuole

$$\Leftrightarrow B^{-1} \Delta b \geq -B^{-1} b$$

in disequazioni: solo
in incognite $\Delta b_1, \dots, \Delta b_m$

$$C^T x^* = C_B^T B^{-1} b \quad \text{la nuova SDA}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}(b + \Delta b) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$C^T \tilde{x} = C_B^T B^{-1} b + \underbrace{C_B^T B^{-1} \Delta b}$$

$$\Delta = C^T \tilde{x} - C^T x^* = \underbrace{C_B^T B^{-1}}_{\text{soluzioni ottimali duali}} \Delta b$$

$$\Delta = C_B^T B^{-1} \Delta b = U^{T*} \Delta b = \sum_{i=1}^m u_i^* \Delta b_i$$

i valori u_i^* delle variabili duali all'ottimo

misurano la variazione della funzione obiettivo

alle variazioni dei termini noti $b_i (b_i \rightarrow b_i + \Delta b_i)$

Variatione dei costi e variazione dei
costi C_F delle variabili fuori base

$$C_F \longrightarrow C_F + \Delta C_F$$

(1) non cambia $B^{-1}b \geq 0$

(2) $\tilde{C}_F = C_F^T + \Delta C_F^T - C_B^T B^{-1} F$ ricresco $\bar{C}_F^T$

$$= \bar{C}_F^T + \Delta \bar{C}_F^T \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta C_F \geq -\bar{C}_F \Rightarrow \begin{matrix} (\Delta C_F)_1 \geq -(\bar{C}_F)_1 \\ (\Delta C_F)_2 \geq -(\bar{C}_F)_2 \\ \vdots \end{matrix}$$

m-m condizioni

$$(\Delta C_F)_j \geq -\bar{C}_j$$

$$j = 1, \dots, m-m$$

$$(\Delta C_F)_{m-m} \geq -(\bar{C}_F)_{m-m}$$

i costi: Valore per
il massimo decremento che può
subire la variabile fuori base affinché la soluzione
ammissibile e di base rimanga ottimale

=> Il costo ridotto di una variabile
 X_j è il massimo decremento che
può subire il costo C_j affinché

Le var B e la SBA vengono aggiornate.

Variatione dei costi C_B

$$C_B \leadsto C_B + \Delta C_B$$

$$\Delta C_B = \begin{pmatrix} \Delta C_{B1} \\ \Delta C_{B2} \\ \vdots \\ \Delta C_{Bm} \end{pmatrix}$$

1) per cui $B^{-1}b \geq 0$

$$2) \tilde{C}_F^T = C_F^T - (C_B^T + \Delta C_B) B^{-1} F \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_F^T - \bar{C}_F^T - \Delta C_B^T B^{-1} F \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta C_B^T B^{-1} F \leq \bar{C}_F^T$$

Sistema di m equa-

nelle m variabili: $\Delta C_{B1}, \Delta C_{B2} \dots \Delta C_{Bm}$

$$C^T x^* = C_B^T B^{-1} b$$

$$\tilde{x} = x^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}^T \tilde{x} = (C_B^T + \Delta C_B) B^{-1} b$$