

f convessa:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

Recap. Segmento che unisce punti sulla curva
è sempre sopra la curva (se f
convessa.)

Se f è convessa e continuamente diff.

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$$

Caso monodimensionale

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) \quad \text{cioè se } f$$

convessa, la derivata è sempre sotto la curva

se ho una funzione convessa, riesco a trovare punti di min.

Stabilità per i punti di minimo

Final Recap

Lex 3

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Matrice

A si dice

SEMI DEFINITA POSITIVA, se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^T A x \geq 0$$

Se invece

$$x^T A x > 0$$

, A si

Si dice DEFINITA POSITIVA

• A è SEMIDEFINITA NEGATIVA, se $-A$ è SEMIDEF. POSITIVA. $(x^T A x \leq 0)$

A è DEFINITA NEGATIVA, se $-A$ è definita positiva $(x^T A x < 0)$

Come facciamo a capire se è semi def. pos. ecc.
esiste un criterio

• Teorema di Sylvester

Sia A una matrice simmetrica

(cioè $a_{ij} = a_{ji}$).

A è (SEMIDEFINITA) POSITIVA se i

determinanti dei minori principali

di A sono POSITIVI (non negativi).

determinanti minori positivi $\Rightarrow$ matrice def. positiva

≥ 0 , semidef. positiva

MINORI PRINCIPALI DI A

Tutte le matrici quadrate composte
dalle prime i righe e i colonne

(interseco le prime i righe e i colonne)

$$\begin{matrix}
 i=1 & i=2 & & i=m \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

* Vale se A è
simmetrica!
 $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ è simmetrica} \\
 \text{è definita positiva}$$

$$\det = ad - bc$$

$$\det_{\text{primo minore}} = 3 \quad \det_{2^{\text{o}} \text{ min}} = 2$$

$$\begin{matrix}
 i=1 & i=2 & i=3 \\
 A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 i=4 & i=2 & i=3 \\
 \det = 2 & \det = 4 & \det = 1 \\
 A \text{ è simm.} \\
 A \text{ è def. positivo}
 \end{matrix}$$

$$\min f_0(x) \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Sia $f_0(x)$ 2 volte differenziabile.
(le derivate parziali seconde sono continue)

$$\frac{\partial^2 f_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} \text{ sono } \underline{\text{CONTINUE}}$$

allora

$\Rightarrow$

È definita la matrice Hessiana

$\nabla^2 f(x)$ e simmetrica (Teo di Schwarz)
per costruzione

Se $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva in
un punto $x \in X$, allora $\exists$ un intorno
di x in $f(x)$ è convesso

Dim

$x \in \mathbb{R}^n$ H.p. $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva
in $x \in \mathbb{R}^n$

x $x+h=y \Rightarrow y = x + \underbrace{y-x}_{h, \text{ spostamento}}$

Applico Taylor

$$f(y) = f(x + (y-x)) = f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{1}{2} (y-x)^T \nabla^2 f(x) (y-x) + \beta_2(x, y)$$

β_2 infinitesimo di ordine superiore

Cioè $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\beta_2(x, y)}{\|h\|^2} = 0$

$$\left\{ \begin{aligned} h \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} (y-x)^T \nabla^2 f(x) (y-x) + \\ &+ \beta_2(x, y) \geq 0 \end{aligned} \right. \quad \text{il resto del termine quadratico } \geq 0$$

Se tolgo questo contributo, otengo

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y-x)$$

se vale questa, f è un intorno in cui f è convessa.

ma se ho una relaz. di questo tipo, la funzione è convessa. Teo precedente

$\Rightarrow f(x)$ è convessa in un intorno

di x
(suff. piccolo)

(intorno di x , $h \rightarrow 0$, quando y si avvicina a x , vale questo relazione)

dimostraz. vale anche al contrario

Funzioni quadratiche

$$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{il termine}$$

di grado m presente è lineare = possibile di più variabili (?)

Termine più alto è di 2° grado

Termine lineare

Forma del Tipo

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

Caratteristica di questa $f(x)$ la funzione quadratica con 3 colori

$$\nabla f(x) = Ax + b$$

$$\nabla^2 f(x) = A$$

Matrice A del Termine quadratico, ed è costante

A è costante

Se A è definita positiva (e quindi non dipende da x), allora la $f(x)$, da Teo precedente,

è convessa in tutto $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ Se A è definita positiva, invar. h. quadratico

allora $\Rightarrow f(x)$ è convessa in tutto $\mathbb{R}^n$ in tutto il dominio poiché la matrice

Hessiana non dipende dalle variabili

$f(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \underline{x_2^2} - \underline{3x_1 x_2} + \underline{3x_1^2} - x_1 + x_2$$

f quadratica

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 + 6x_1 - 1 \\ 2x_2 - 3x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \overset{i=1}{6} & \overset{i=2}{-3} \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Matrice costante

$$\det = 6 > 0$$

$$\det(\nabla^2 f(x)) = 12 - 9 = 3$$

$\Downarrow$
 $f(x)$ è convessa in tutto $\mathbb{R}^n$,
 la matrice è costante, non dipende
 dalle variabili

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

• Qual'è che esistono i punti di minimo?

• Esistenza dei punti di minimo per $f(x)$

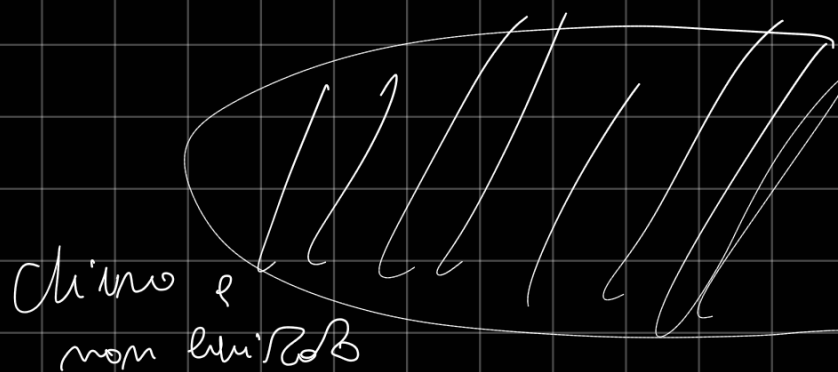
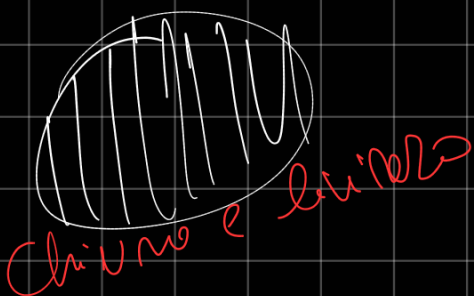
// Teo Weierstrass

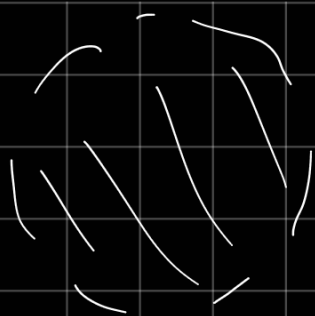
Se $f(x)$ è continua su un insieme X chiuso e limitato, allora
 $\Rightarrow f(x)$ avendo un punto di minimo globale

• Insieme chiuso: un insieme che contiene la frontiera

• Insieme limitato: Se $\nexists M \in \mathbb{R}$:
 $|x + M| \in X \quad \forall M \in \mathbb{R}^+$

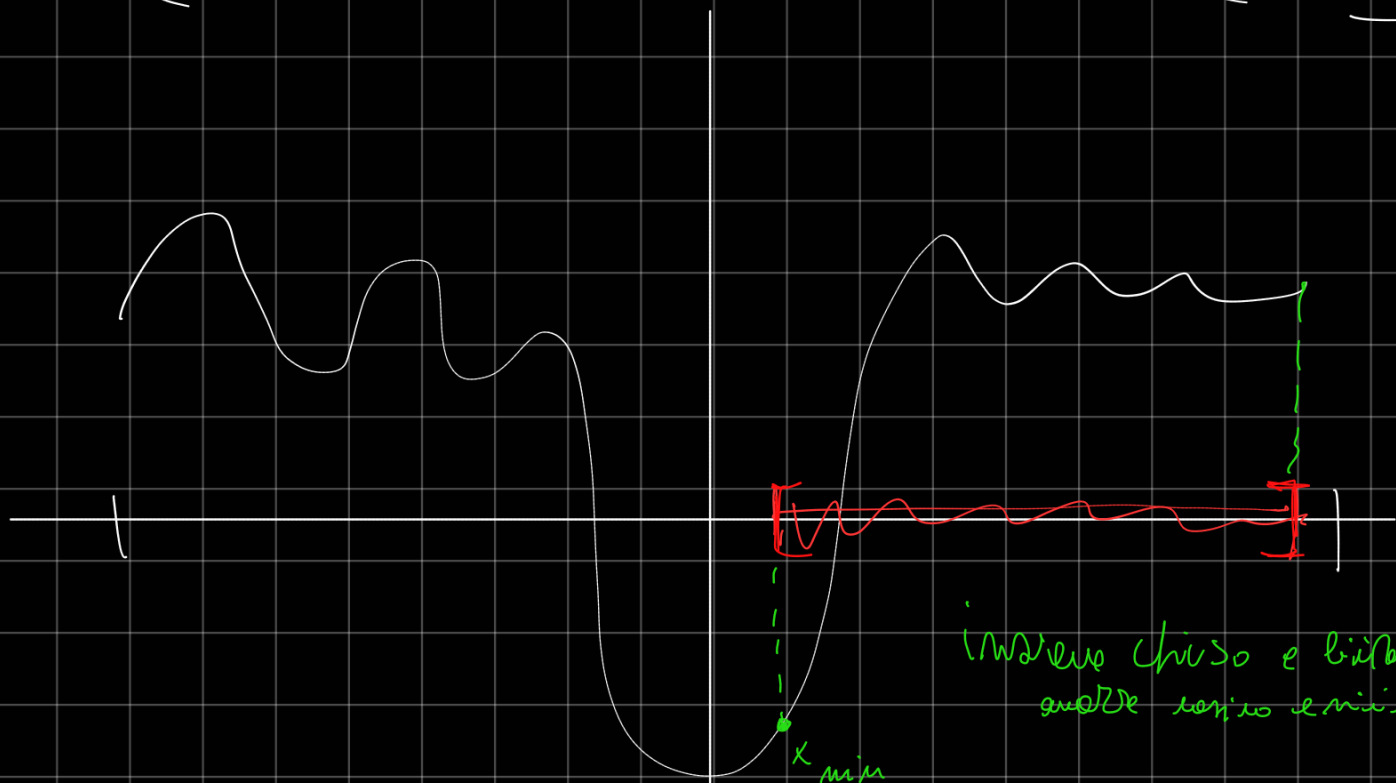
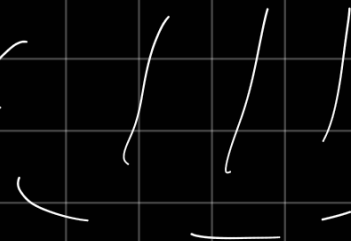
(non esiste una direzione di ...
non è possibile spostarsi indefinitamente
lungo una direzione, senza uscire dall'insieme)





non chiuso
ma limitato

non chiuso
e non
limitato



intervallo chiuso e limitato
quello continuo e finito

$$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, ^{definito} l'insieme di livello
di $f(x)$ in X rispetto ad α
 $L(x, \alpha) = \{ x \in X; f(x) \leq \alpha \}$
^{insieme ammissibile}

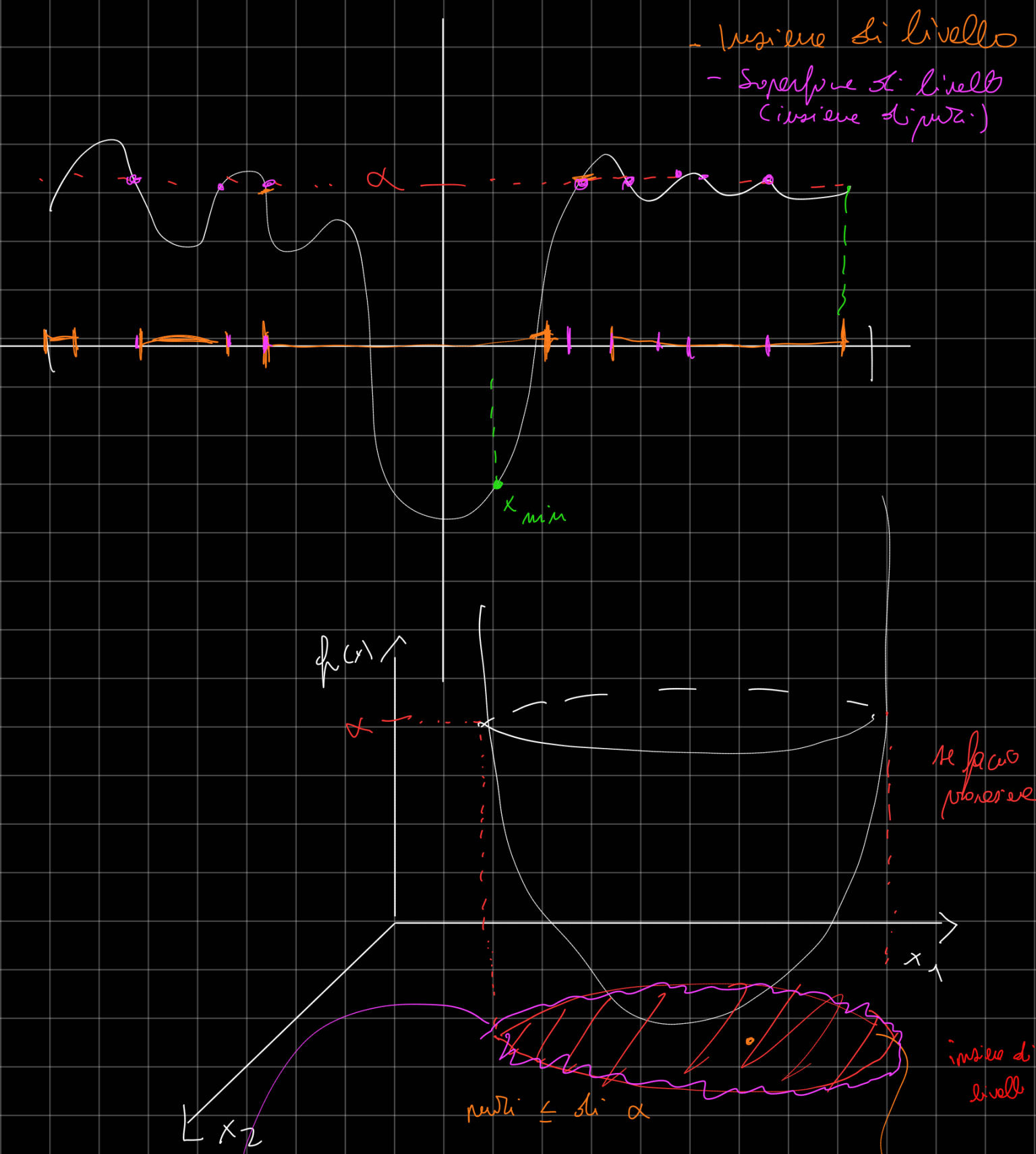
^{definito} Tutti i punti dell'insieme ammissibile, in cui la
funzione è minore di α .

La Superficie di livello di $f(x)$ in

X rispetto ad α

$$\mathcal{L}(X, \alpha) = \{x \in X : \underline{f}(x) = \alpha\}$$

luogo dei punti in cui $\underline{f}(x) = \alpha$



(, $\mathcal{L}(X, \alpha)$ superf.
di livello

$\mathcal{L}^V(X, \alpha)$

- Si può dimostrare che
 - Se $f(x)$ è continua in un insieme X e almeno uno dei
due insiemi di livello è
limitato $\Rightarrow f(x)$ ammette
un punto di minimo in X .