

Matteaggia Giusto

18/10/2010

• Funzioni convexe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

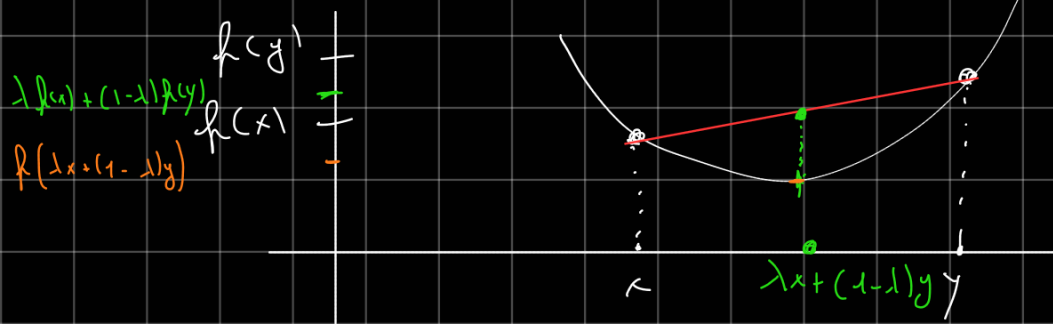
$f(x)$ è funzione convessa cioè

$$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Cioè il segmento che unisce i punti x e y sulla

retta, è sopra la curva



Data $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ è convessa

$\Leftrightarrow$ (se e solo se) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si

$$\text{ha che } f(y) - f(x) \geq \nabla f^T(x)(y-x)$$

la tg è sopra il
in $\mathbb{R}^n$ è sopra il
di sotto della curva

Funzione Convexa

Sia $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
convexa in $\mathbb{R}^n$.

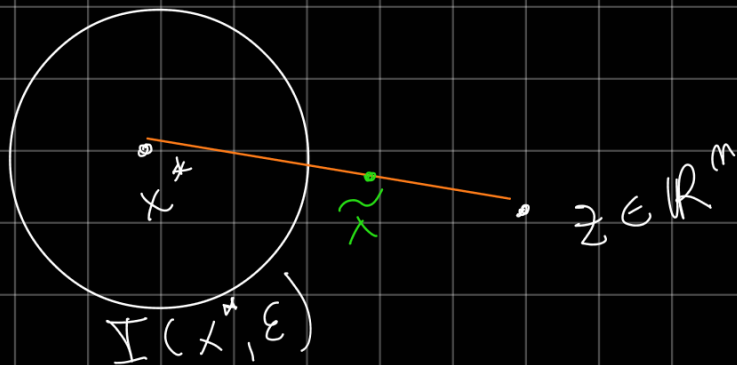
Se x^* è un minimo locale $\Rightarrow x^*$ è anche
un minimo globale

DIM.

Hp. $f(x)$ convexa, $x^* \in \mathbb{R}^n$ minimo
locale

Th. x^* è un minimo globale.

Per Hp. $\exists I(x^*, \varepsilon)$ t.c.  $\rightarrow I(x^*, \varepsilon)$
 $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in I(x^*, \varepsilon)$



Prendo
segmento
da x^* a z

$\tilde{x}$ generico punto
sulla linea
convexa
tra x^* e z

$$\tilde{x} = \lambda x^* + (1-\lambda)z \quad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

$\tilde{x}$ è conv. convessa

$$\text{Per } \lambda \rightarrow 1 \Rightarrow \tilde{x} \rightarrow x^* \Rightarrow \tilde{x} \in I(x^*, \varepsilon)$$

è entrato nella palla, vale la proprietà

$$\Rightarrow f(x^*) \leq f(\tilde{x}) = \text{per } \lambda \rightarrow 1$$

$$= f(\lambda x^* + (1-\lambda)z) \leq \text{per convessità} \quad \text{applicando def di } f \text{ convessa}$$

$$\leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(z)$$

quindi:

$$f(x^*) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)f(x^*) \leq (1-\lambda)f(z)$$

$$\Rightarrow f(x^*) \leq f(z) \Rightarrow x^* \text{ è M.V. G.L.O.B.}$$

dove il punto z era qualunque in $\mathbb{R}^n$

Quindi x^* è un punto di minimo globale, non locale

- Quindi se $f(x)$ ammette minimo, quello che trova è un minimo globale ed f è convessa

Se f convessa le condiz. neces. del 1° ordine
diventano neces. e suffic.

* Condizioni $\Rightarrow$ necessarie e sufficienti
di minimo globale per
funzioni convexe *

Sia $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
convessa con gradiente $\nabla f(x)$
continuo in $\mathbb{R}^n$.

Il punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un minimo
globale di $f(x)$ se e solo se

$$\nabla f(x^*) = 0$$

i punti che annullano
il gradiente
sono i punti di minimo
se il min. esiste e se
 f convessa

D.M

Condiz. necessaria $\nabla f(x^*) = 0$ è già solb
dimostrata

che la condiz. $\Rightarrow$ è necessaria, deriva
dalla condiz. necessaria del 1° ordine

$\Leftarrow$ Dimostrare che è sufficiente

Hp. $\nabla f(x^*) = 0$ Th x^* è un
MINIMO GLOBALE

Dato che $f(x)$ convessa, allora

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$$

Quando $x = x^*$

$$f(y) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T (y - x^*) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Per ipotesi $\nabla = 0$

$$f(y) \geq f(x^*) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

allora x^* è un minimo globale

Prendo una f quadratica

$$f(x) = x_2^2 - 3x_1x_2 + 3x_1^2 - x_1 + x_2$$

$f(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione quadratica
(cioè ha matrice hessiana costante)

$\Rightarrow \nabla^2 f(x)$ costante

$\Rightarrow$ se $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva, la funzione è localmente convessa. Più precisamente se la f è quadratica, ∇ costante, quindi $f(x)$ convessa in tutto il dominio

• Se $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva, poiché è costante $\Rightarrow$ $f(x)$ è convessa in $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -3x_2 + 6x_1 - 1 \\ 2x_2 - 3x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

una f convessa ha Hessiana positiva

derivata prima per x_1 e poi x_2

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice Hessiana è simmetrica per Teo di Schwarz

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\det(\nabla^2 f(x)) = 3 > 0 \quad \text{e anche il minore è positivo}$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(x)$ è definita positiva

$\nabla^2 f(x)$ costante e def. pos. $\Rightarrow f(x)$ è convessa in $\mathbb{R}^2$

• Trovo allora i punti che annullano il gradiente.

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 + 6x_1 - 1 = 0 \\ (-2x_2 - 3x_1 + 1 = 0) \end{cases} x_2$$

$$x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

è un minimo globale

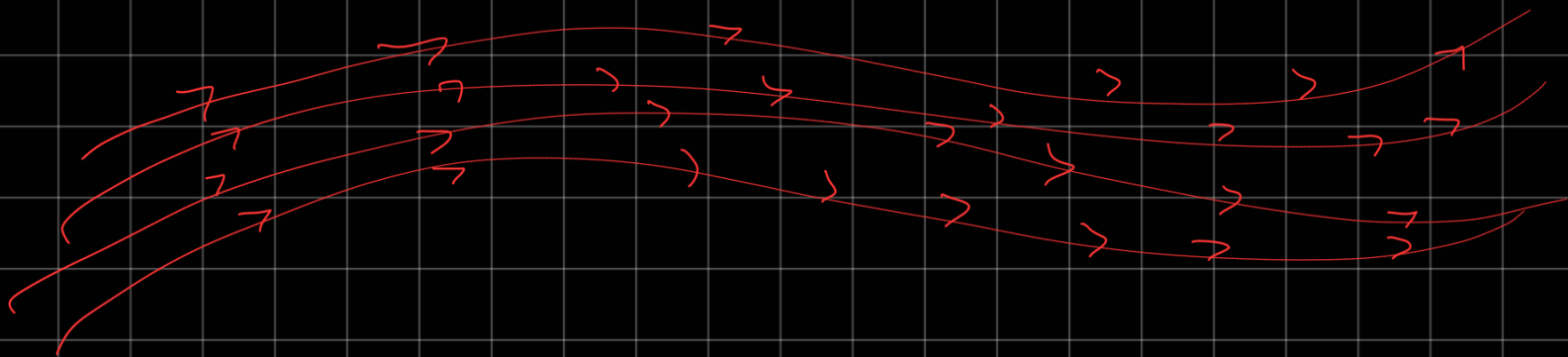
x^* annulla il gradiente e la f è convessa
 dunque min. loc. è min. glob.

Ottimizzazione non vincolata: insieme ammissibile è tutto $\mathbb{R}^n$.

Sì: può fare il discorso analogo con le funzioni concave

in cui le due ~~due~~ minimi, sarà
 un minimo globale, e con la ~~recon~~
 e suff. e' de si annulli il gradiente

Fine parte di ottimizzazione
 non vincolata



Problemi di OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA
 $\min f(x)$
 $x \in X \subset \mathbb{R}^n$
 l'insieme ammissibile e' un
 sottoinsieme del dominio
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE NON LINEARE
 vincoli

$\min f(x)$

insieme ammissibile
 descritto da
 equos. e diseq.

$$h_i(x) = 0$$

$$h_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$i = 1, \dots, m$

$$g_j(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \equiv \left\{ \begin{array}{l} h_2(x) = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) = 0 \\ f_{m+1}(x) \geq 0 \\ f_{m+2}(x) \geq 0 \\ \vdots \\ f_{m+p}(x) \geq 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{m equazioni} \\ \text{p disuguaglianze} \end{array} \right.$$

$J = m+1, \dots, m+p$

L'ipotesi che faremo sarà che

H_p . $f(x)$, $h_i(x)$ e $f_j(x)$ sono
2 volte continuamente differenziabili

Insieme dei vincoli
attivi in punto $\bar{x} \in X$

• Dato $\bar{x} \in X$, un vincolo $f_j(x) \geq 0$
si dice attivo in $\bar{x}$ se $f_j(\bar{x}) = 0$

Le m equazioni saranno sicuramente vincoli
attivi, e in più sono vincoli attivi
le disuguaglianze che sono nulle in quel
punto $\bar{x}$

- L'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x} \in X$ è formato da tutti i vincoli soddisfatti all'qualsiasi in $\bar{x}$:

$$1) h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$2) h_j(x) \geq 0: h_j(\bar{x}) = 0 \quad j = m+1, \dots, m+p$$

insieme
dei vincoli
attivi

Esempio: X descritto da una sola disuguaglianza

$$X \equiv \left\{ \underbrace{1 - |x_1| - |x_2|}_{h_f(x)} \geq 0 \right\} \quad X \subset \mathbb{R}^2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in X$$

$|x|$ non è una f. lineare, posso linearizzarla costruendo un sistema

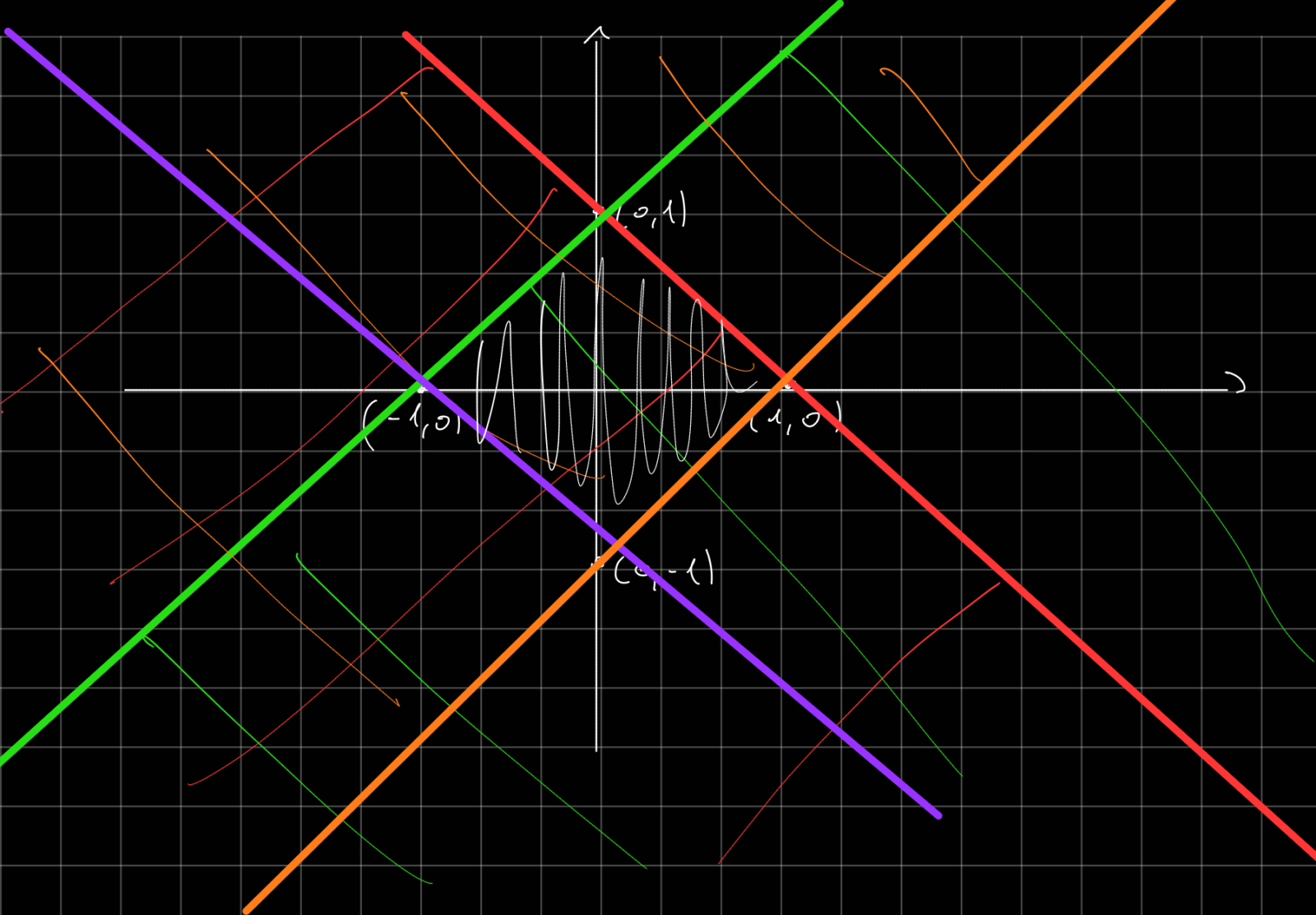
$$1 - |x_1| - |x_2| \geq 0 \equiv \begin{cases} 1 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ 1 + x_1 - x_2 \geq 0 \\ 1 - x_1 + x_2 \geq 0 \\ 1 + x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

disegno

$$\begin{aligned} 1 - x_1 - x_2 &= 0 \\ 1 + x_1 - x_2 &= 0 \\ 1 - x_1 + x_2 &= 0 \\ 1 + x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tutti i punti
che soddisfano
la diseq. sono
quelli sotto la
retta

Corrisponde allo stesso
insieme ammissibile X



l'insieme ammissibile è il quadrato
all'interno, ottenuto con un solo vincolo
non lineare

altro esempio

$$X \equiv \{ x \in \{0, 1\}^n \}$$

Tutti i vettori che
hanno componenti 0 o 1

possiamo descrivere questo insieme con
un insieme di eq. non lineari

$$X \equiv \begin{cases} x_1^2 - x_1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_m^2 - x_m = 0 \end{cases} \equiv \left\{ x \in \{0, 1\}^m \right.$$

es.

$$x_1^2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$x_i^2 - x_i = 0 \Rightarrow x_i(x_i - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_i = 0 \\ \text{opp} \\ x_i = 1 \end{cases}$$

no lineares. ma 2o equos.

X è un insieme discreto di poli, non continuo