

Lezione 6

Condizio. di ottimalità
di minimo locale, caso
caso vincolato

18/10/22

Qui eq. e diseq. viene chiamata vincolo
del sistema.
di solito eq. e dis non lineari

$\min f(x)$

caso più semplice possibile, 1 vincolo

$$x \in X \equiv h_1(x) = 0$$

Se mi posto lungo una linea, cosa accadrà

a $\bar{x}$? qui sono nel caso vincolato

non posso muovermi liberamente ma lungo la curva

$$x \rightsquigarrow \bar{x} + d \in X$$

mi devo spostare
ammissibile

lungo la direzione d
sono vincolato nel movimento, posso muovermi solo
lungo la curva ammissibile

Quindi mi posto lungo la tangente alla curva

Le direzioni ammissibili: quando $\|d\| \rightarrow 0$

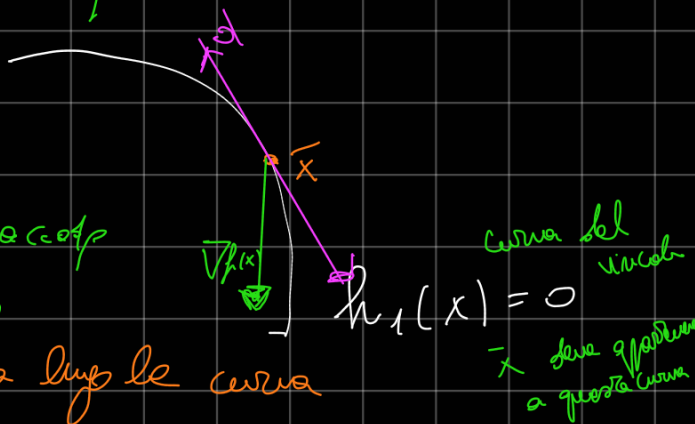
sono quelle lungo la tangente, o verso l'alto o
verso il basso. In $\mathbb{R}^n$ sono infinite direz.

di spostamento

per essere minimo

Se voglio trovare il minimo devo muovermi
lungo una curva di discesa

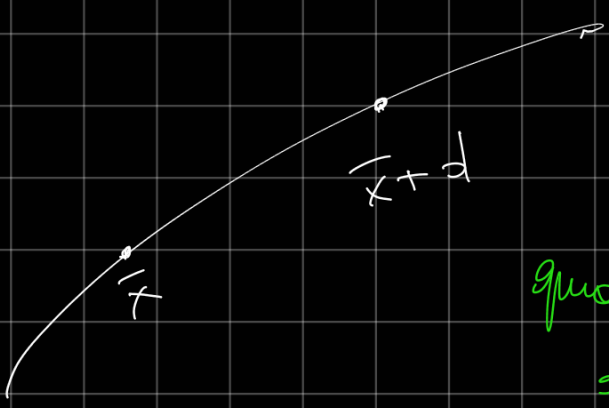
(1) d deve essere una dir. ammissibile



2) d deve essere direzione di discesa
 cioè se $\nabla f(x)^T \cdot d < 0$ cioè se $\nabla f(x)^T \cdot d < 0$

Gradiente forma un angolo ottuso con la dir. di movimento

nel nostro grafico, mi sposto in alto lungo la curva del vincolo, così da formare un angolo ottuso con il gradiente



In $\mathbb{R}^n$!
 $h_1(\bar{x} + d) = 0$ non posso usare il concetto di tangente in $\mathbb{R}^n$

qual è la dir. lungo cui devo muovermi per cui sia ancora verificato il vincolo?

USO TAYLOR

$\bar{x}$, rispetta il vincolo

$h_1(\bar{x}) = 0$ vincolo attivo

impossibile di andare sempre rispetto al 0

$$h_1(\bar{x} + d) = h_1(\bar{x}) + \nabla h_1(\bar{x})^T d + \underbrace{B_1(\bar{x}, d)}_0$$

$\rightarrow$ dire $\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \frac{B_1(\bar{x}, d)}{\|d\|} = 0$

Per $\|d\| \rightarrow 0$,

così vincolo rispettato

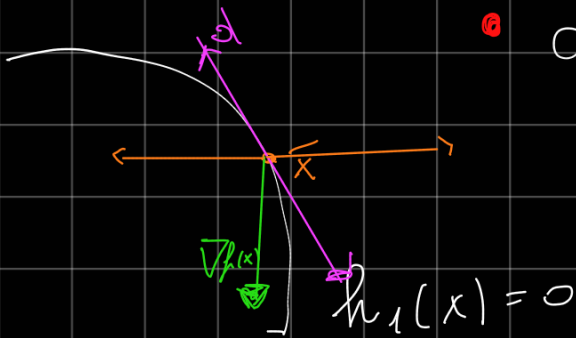
$$h_1(\bar{x} + d) \approx \underbrace{h_1(\bar{x})}_0 + \nabla h_1(\bar{x})^T d = 0 \Rightarrow$$

0 perché è sulla curva

$\Rightarrow$ $\bar{x} + d$ è ^{direzione} ammissibile, se $\nabla h_1(\bar{x})^T d = 0$
 ovvero, se $\nabla h_1(\bar{x})$ e d sono ORTOGONALI

Inoltre: avendo visto che se ci muoviamo
 ortogonalmente rispetto al gradiente
 la funzione rimane costante.

Qui implica che il vincolo è sempre rispettato



Le direzioni ammissibili sono
 quelle ortogonali al
 al gradiente di $h_1(x)$
 Nel caso monodimensionale
 ciò significa che mi
 muovo lungo la tangente
 di $h_1(x)$

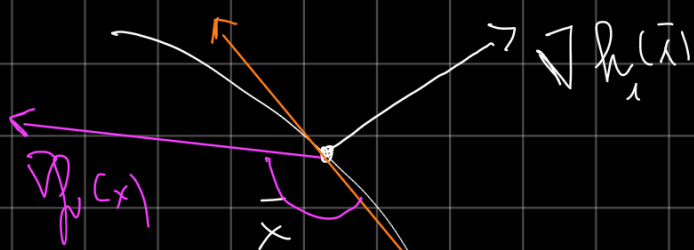
$\bar{x} \in X \equiv \{ x \in \mathbb{R}^n : h_1(x) = 0 \}$

$\bar{x}$ non è minimo locale se $\exists d$ tale che

1) d è direzione di discesa: $\nabla h(\bar{x})^T d < 0$

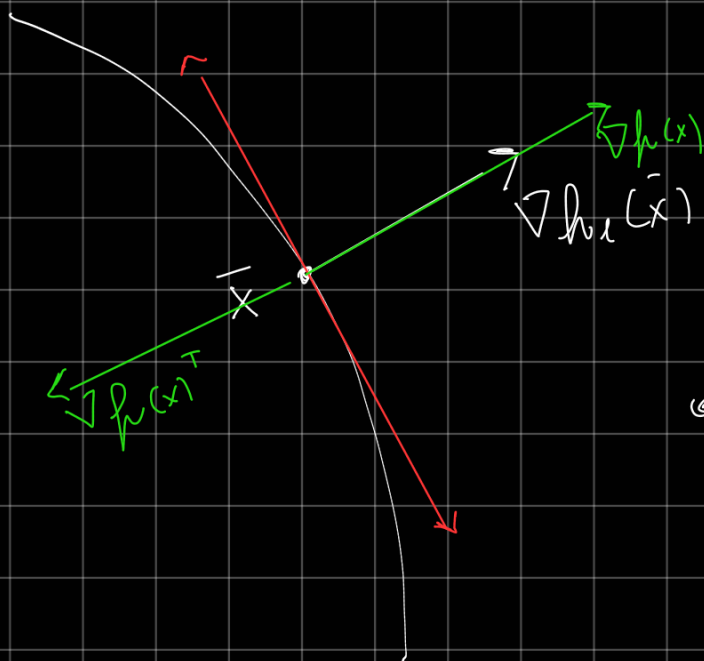
2) d è direzione ammissibile: $\nabla h(\bar{x})^T d = 0$

Quindi: se valgono queste condizioni, $\bar{x}$ non è un minimo locale



direzione di discesa ammissibile

- Esiste una config. $\nabla f(x)$ e $\nabla h_1(x)$ per cui non è possibile il verificarsi di queste condizioni? che non $\exists d$ che soddisfa tel



2 modi
 $\nabla f(x)^T$ dup. senso
 direzione di ∇h_1 ,
 con verso concorde
 o opposto

- ∇f mi dice quando la direc. e di discesa
 $(\nabla f(x)^T < 0, \text{ angolo } > 90^\circ)$

- $\nabla h_1(x)$ mi dice qual è la direc. ammissibile (angolo a ∇f)

- Quando $\nabla f(\bar{x})$ e $\nabla h_1(\bar{x})$ sono paralleli non esiste direzione di discesa

ammissibili

Vettori paralleli = proporzionali

$$\Rightarrow \underline{\underline{\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) \quad \text{con } \lambda_1 \in \mathbb{R}}}$$

quindi $\bar{x}$ è un candidato a minimo locale

Formalizziamo

$$\bullet \min f(x)$$

$$X \equiv h_1(x) = 0$$

insieme ammissibile descritto
da un vincolo attivo

Definisco FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(x, \lambda_1) = f(x) - \lambda_1 h_1(x)$$

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}$$

moltiplicazione di Lagrange
associato al vincolo $h_1(x) = 0$

prevediamo

$$\bar{x} \in X$$

e calcoliamo il gradiente della f rispetto
a λ_1 e lo poniamo = 0. verrà fuori una condizione...

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) & \text{con } \lambda_1 \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) \text{ e } \nabla h_1(\bar{x}) \text{ sono paralleli} \end{cases}$$

• L'annullamento del gradiente della f .

Lagrangiana, equivale a dire che
il gradiente del vincolo h e della f
sono paralleli, cioè (DN)

$\Rightarrow$ ESISTE CONDIZIONE DI DISCESA

AMMISSIBILE (e quindi $\bar{x}$ è un
candidato minimo)
se $\bar{x}$ annulla il grad della Lagrangiana

$\Rightarrow \bar{x}$ potrebbe essere un minimo locale

* Condizione minimo locale per minimo
ora l'annullamento del gradiente della
 f diretto.

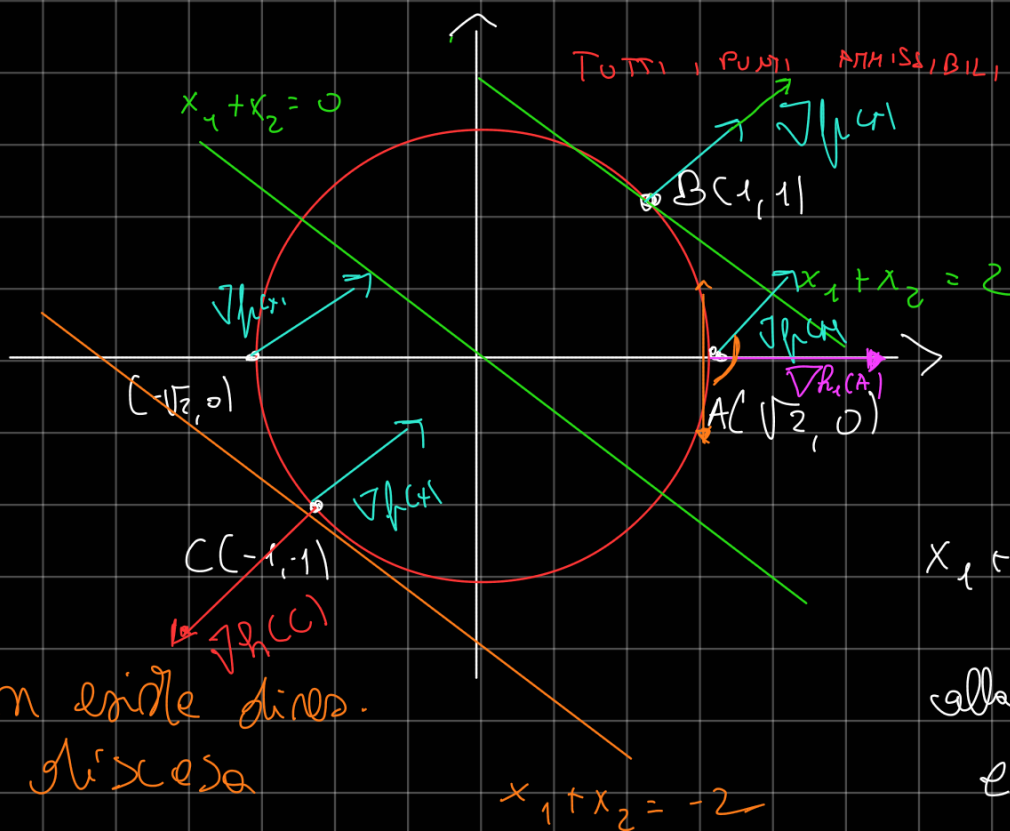
Qui ora con programmazione vincolata,

* la condizione necessaria per minimo locale è che
nulli il gradiente della F Lagrangiana

$$\min x_1 + x_2 = f(x)$$

$$X \equiv f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

equos. di un
circolo di raggio
 $\sqrt{2}$

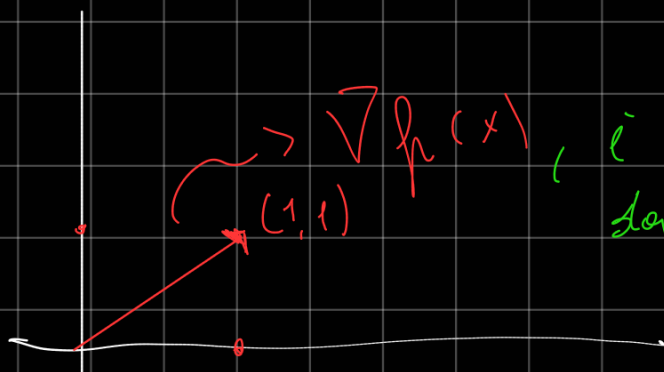


Non esiste direz.
di discesa

$x_1 + x_2 = 0$ Sono
rette parallele
alla linea. nel 1° e 3°
quadrante

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gradiente di f positivo



è costante e non dipende
da x , ed è orientato verso i
valori positivi.

La dir. del $\nabla f(x)$ è opp. al dir.

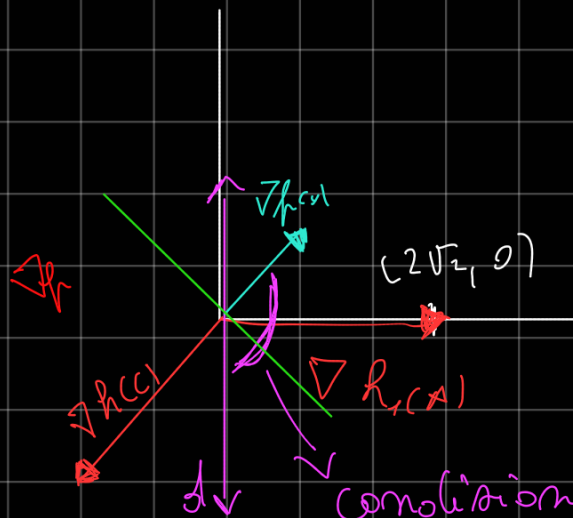
$$\nabla h_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

non è costante, gli pseudo
del punto

$$A = (\sqrt{2}, 0)$$

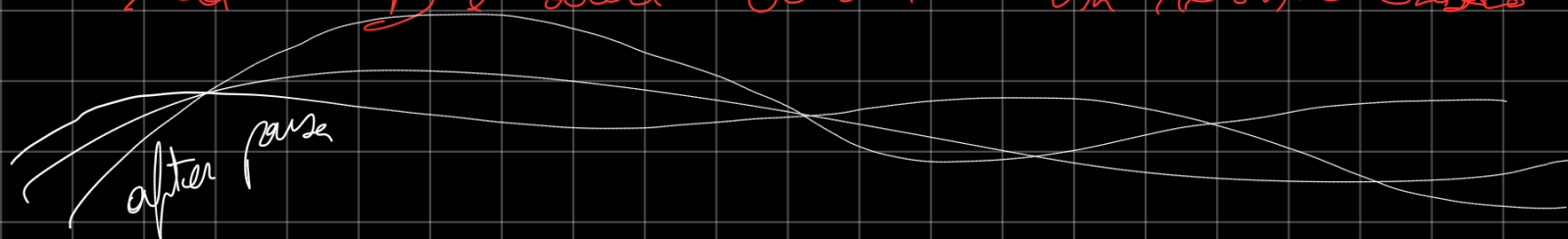
$$\nabla h_1(A) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla h_1(C) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



• C è un candidato minimo non
avendo disce. di disce
ma purtroppo C non è minimo

anche su B il gradiente $\nabla h_1(x)$ ha
stessa direzione sc. ∇h_1
ma B è soluzione ottima un massimo globale



rimando ora è una
disog.

$$\min f(x)$$

$$X = \{x \mid g_1(x) \geq 0\}$$

$$x \in X$$

devo rimanere nell'insieme
ammissibile
 $g_1(\bar{x} + d) \geq 0$



• d è direzione di discesa se $\nabla g(\bar{x})^T d < 0$

Quanto d è direzione ammissibile?

Consideriamo i due casi:

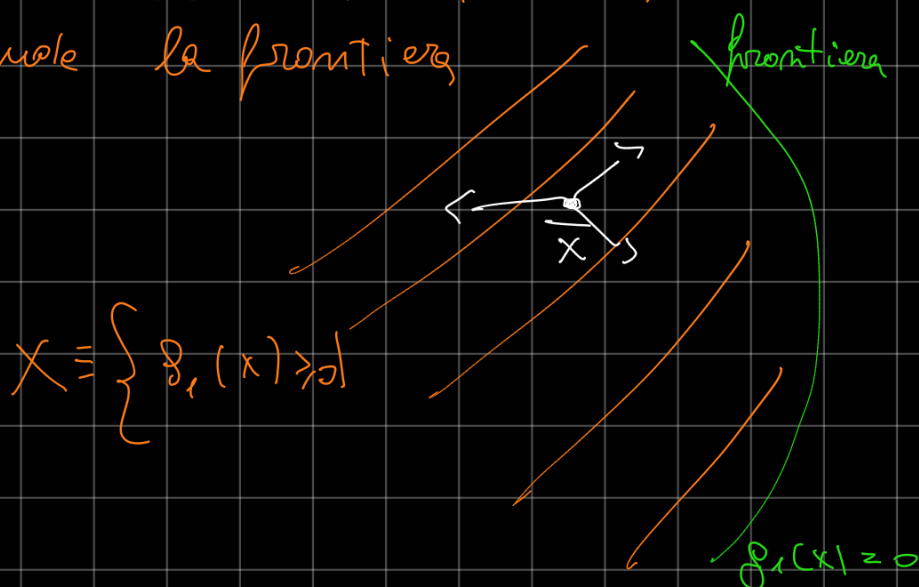
1) $g_1(x) \geq 0$ non è attivo in $\bar{x}$
 $(g_1(\bar{x})) > 0$

2) $g_1(x) \geq 0$ è attivo in $\bar{x}$ (mi trovo sulla frontiera del c.s. ammissibile)
 $(g_1(\bar{x}) = 0)$



Caso 1) $f(x)$ non attivo in $\bar{x}$, $g_1(\bar{x}) > 0$

insieme ammissibile che non
comprende la frontiera



qualunque direzione $d \in \mathbb{R}^n$ nuovo

rimango sempre nell'insieme, cioè

$\forall d \in \mathbb{R}$ è direzione ammissibile, perché $\|d\|$ è

piccola.

Quando è che $\bar{x}$ è candidato a punto di minimo?

- $\bar{x}$ candidato se ∇f cambia di segno, cioè è
uno delle assillabili

$$\nexists d \in \mathbb{R}^n: \nabla f(\bar{x})^T d < 0$$

non esiste direzione che forma un angolo ottuso con il gradiente.

$$\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$$

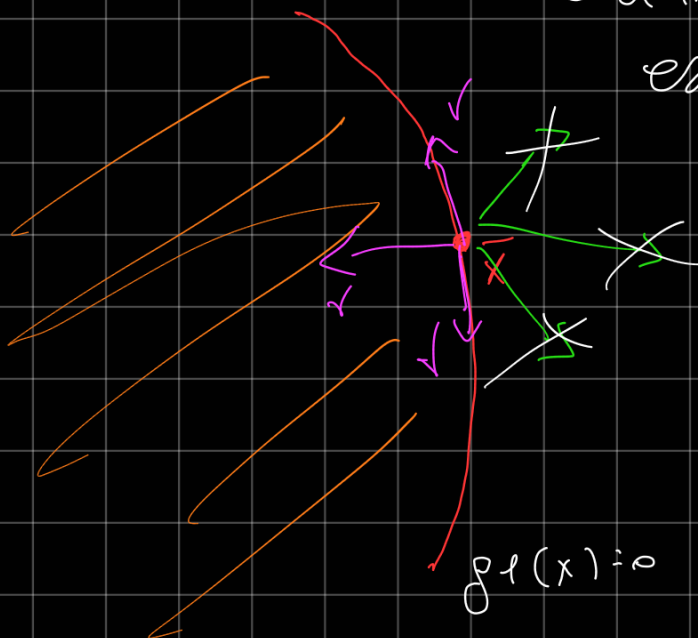
Come caso non vincolato

perché prodotto scalare è nullo

2) $g_1(x) \geq 0$ è attivo in $\bar{x}$: $g_1(\bar{x}) = 0$

$\bar{x}$ $\bar{x} + d$
 $g_1(\bar{x} + d) \geq 0$

ora il vincolo deve essere rispettato



$d \in \mathbb{R}^n$ è direzione di discesa se

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0$$

Quando $d \in \mathbb{R}^n$ è direzione ammissibile?

devo rispettare i vincoli, non posso muovermi liberamente. Posso lungo tangente

oppure entrare nello spazio ammissibile

USO TAYLOR

$$g_1(\bar{x} + d) = g_1(\bar{x}) + \underbrace{\nabla g_1(\bar{x})^T d}_{\substack{\text{vincolo} \\ \text{attivo}}} + \beta_1(\bar{x}, d) \geq 0$$

quando $\|d\| \rightarrow 0$

$$g_1(\bar{x} + d) \approx \nabla g_1(\bar{x})^T d \geq 0 \Rightarrow d \text{ direzione ammiss. se } \nabla g_1 \cdot d \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla g_1(x)^T \cdot d \geq 0} \Rightarrow d \in \mathbb{R}^n \text{ e } d \text{ direzione ammissibile}$$



$\nabla g_1(x)$ e d formano un angolo non ottuso

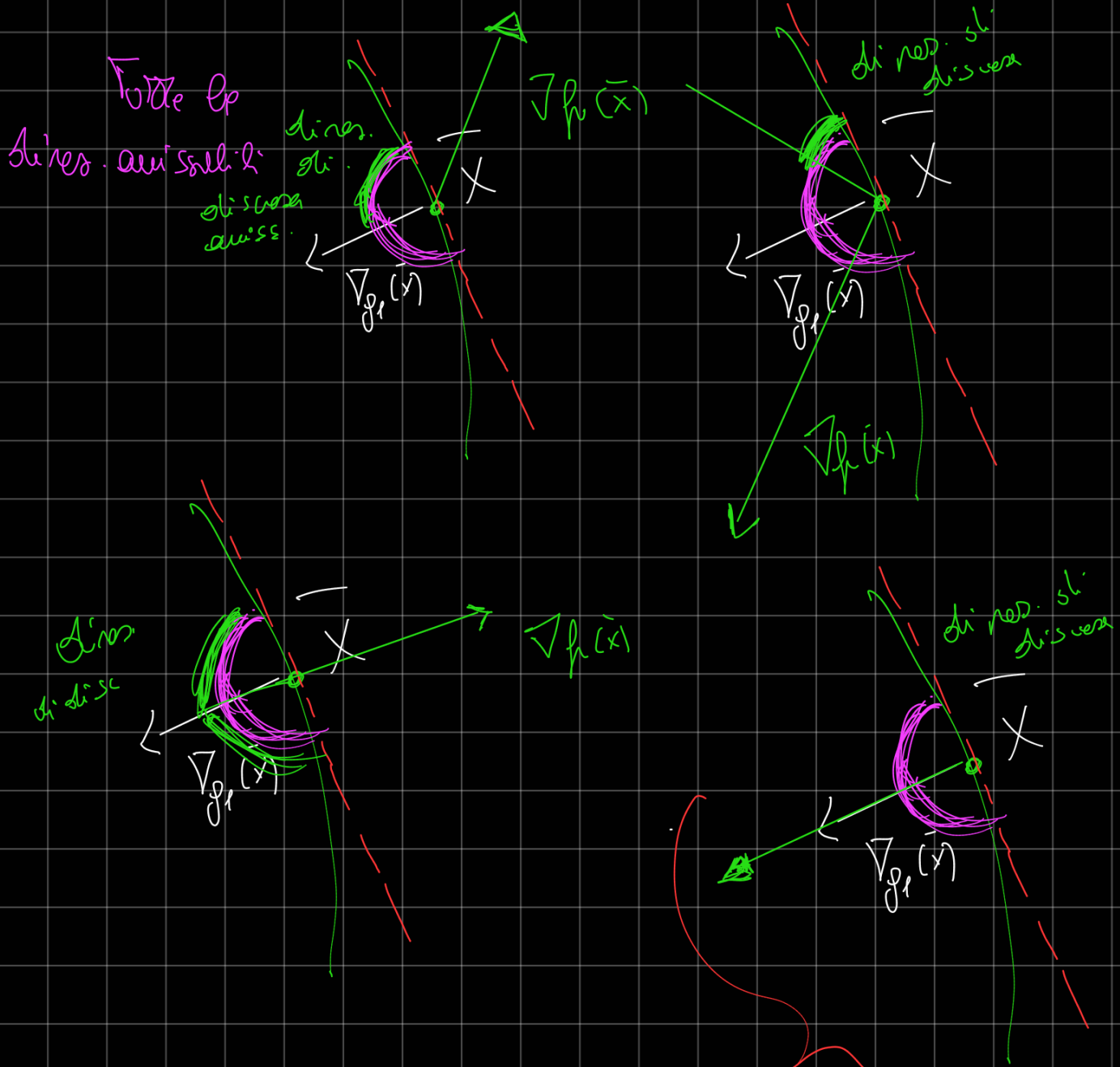
$g(\bar{x})$ vincolo attivo

(caso 2) $\Rightarrow x$ non è minimo locale &

$\exists d \in \mathbb{R}^n$:

- a) $\nabla f(x)^T \cdot d < 0$ $\Rightarrow$ direz. di discesa
- d è direz. di discesa

b) $\nabla g_1(\bar{x})^T \cdot d \geq 0$ ∇f è direz. ammiss. ∇f è direz. no ammiss.



Non si formano mai un angolo ottuso tra ∇f e ∇g_1

Se $\nabla f(\bar{x})$ e $\nabla g_1(\bar{x})$ sono paralleli e

hanno lo stesso verso, non è

possibile trovare una direzione

di discesa ammissibile

questo è
l'unico caso

quindi se

$$\nabla f(\bar{x}) = -\lambda \nabla g_1(\bar{x}) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \underline{\lambda \geq 0}$$

vettori paralleli e con lo stesso verso

$\Rightarrow \bar{x}$ è un possibile minimo locale

$$\min f(x)$$

$$X \equiv g_1(x) \geq 0 \quad \Leftarrow$$

introduciamo allora

caso vincolo
lineare.

FUNZIONE LAGRANGIANA

$$* L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g_1(x)$$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda \geq 0$) è il moltiplicatore
di Lagrange associato al vincolo

$$g_1(x) \geq 0$$

~~$\lambda \in \mathbb{R}$~~ Condizioni di discesa

ammissibili in $\bar{X}$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni

$$A) \nabla_x L(\bar{x}_1, \lambda_1) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) = 0$$

con $\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$B) \lambda_1 g_1(\bar{x}) = 0 \quad \text{CONDIZIONE DI COMPLEMENTARITA'}$$

Se sono valide queste due condizioni
il punto $\bar{x}$ è un candidato punto di
minimo, perché non $\exists$ direzione
di discesa in X

A) e B) dovremmo richiamare
i vari dei
disegni precedenti
verifichiamo...

1) Se $g_1(x)$ non è attivo in $\bar{x}$, $g_1(\bar{x}) > 0$

$$B) \Rightarrow \text{poiché } g_1(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A) \Rightarrow \nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1) = \nabla f(\bar{x}) = 0$$

nel caso l'unico punto che non $\exists$ direzione
di discesa se $\nabla f(\bar{x}) = 0$

avremo infatti sette che non esisterà direzione
di discesa se $\nabla f = 0$

2) Se $g_1(\bar{x})$ è attivo in $\bar{x}$, ovvero $g_1(\bar{x})=0$

B) è soddisfabile

A) $\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x})$ con $\lambda_1 \geq 0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \nabla f(x)$ e $\nabla g_1(x)$ sono paralleli
e con lo stesso verso

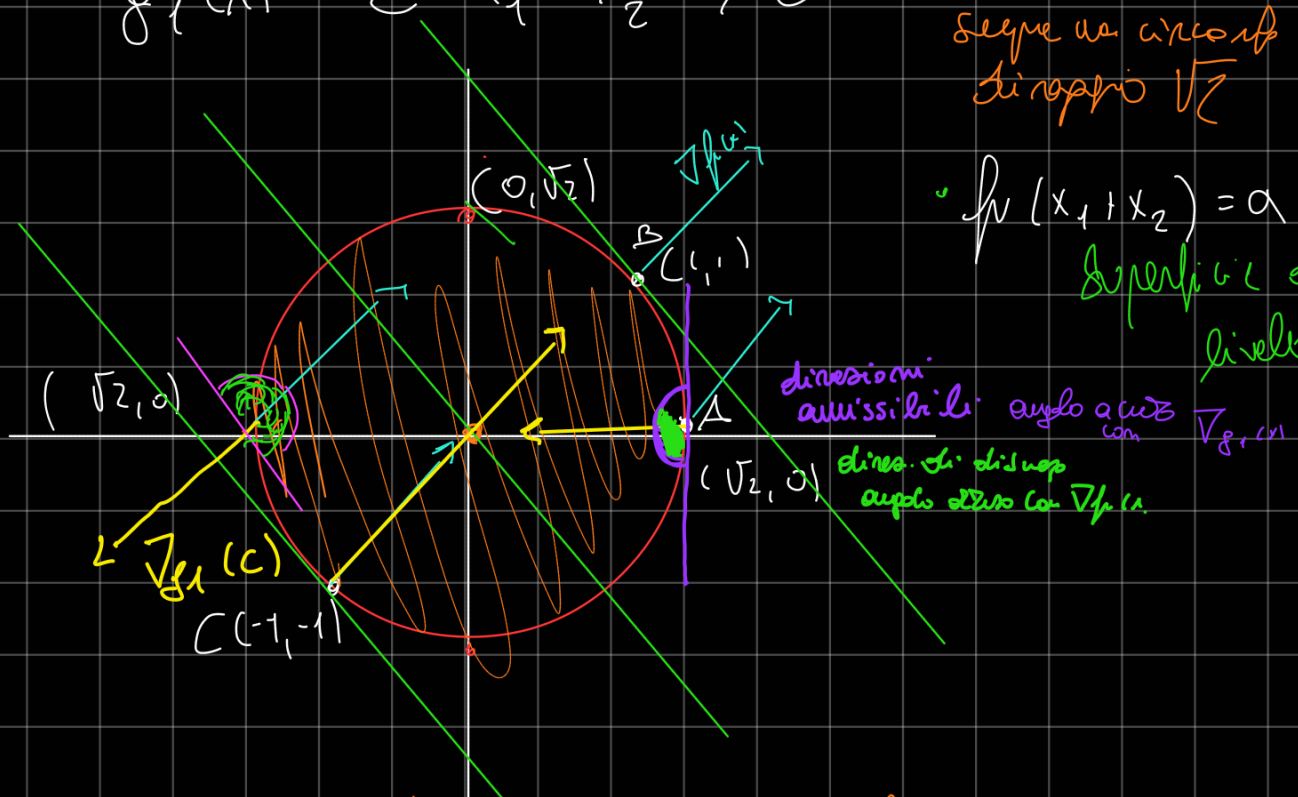
Esempi

$\min x_1 + x_2$

$X = \{x \mid g_1(x) = 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\}$

Vincolo $\bar{x}$
segue una circonferenza
di raggio $\sqrt{2}$

$f(x_1, x_2) = \alpha$
Superficie di
livello



Tutti i punti interni alla circonferenza, punti interni,

appartengono all'insieme ammissibile

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ costante}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = C$$

è un minimo globale
La funzione sarebbe ancora,
ma esce dall'insieme
ammissibile.

Ma per verificare il gradiente di f_1

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \text{ dipende dalle variabili}$$

$$\nabla g_1(A) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$d = \nabla g_1(A)$ è dir. ammissibile nel pto A

$$\nabla g_1(B) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ad esempio } d = \nabla g_1(B) \text{ è}$$

dir. di discesa ammissibile
B non è minimo locale
coincide con antigradiente di f_1

$$\nabla g_1(C) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

entrambi i gradienti
hanno stessa dir. e stesso

vero

- $\nabla g_1(C)$ e $\nabla f(C)$ sono paralleli con
lo stesso verso $\Rightarrow$ ~~X~~ non linea di
discesa
ammissibile.