

Lezione 7

25/10/2010

⇒ 2 vincoli

$$\min f(x)$$

$$X \equiv \begin{cases} g_1(x) \geq 0 \\ g_2(x) \geq 0 \end{cases}$$

Quando non riesce
a trovare un punto
di X è
ammissibile?

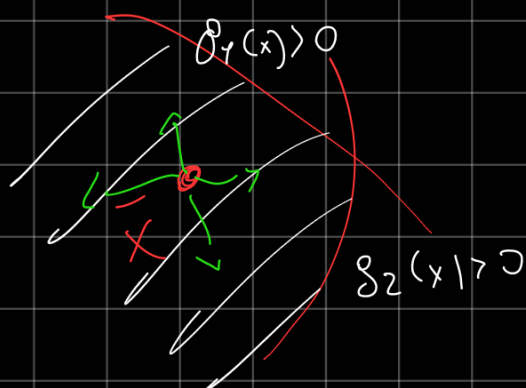
$\bar{x} \in X$ Quando è possibile trovare
una direzione di ricerca ammissibile?

Casi:

1) In $\bar{x} \in X$ non è attivo nessun vincolo

$$\Rightarrow g_1(\bar{x}) > 0 ; g_2(\bar{x}) > 0$$

$\Rightarrow \bar{x}$ è un punto interno di X



Se mi posso di poco,
cammino solo dentro,
ogni d , per $\|d\| \approx 0$
è ammissibile

ogni direzione $d \in \mathbb{R}^n$ è ammissibile.

quando non $\exists$ una (curva di discesa?)
(libero nel caso non vincolato)

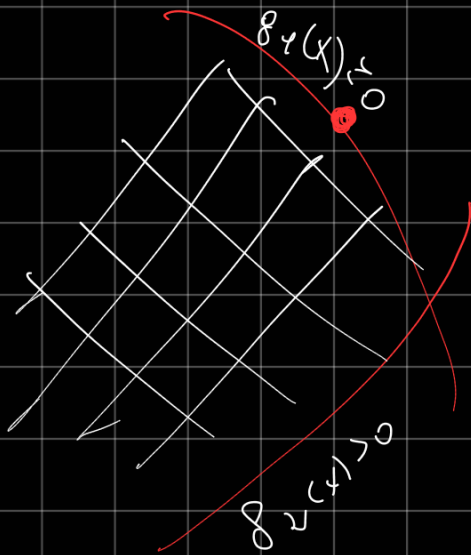
$\Rightarrow d \in \mathbb{R}^m$ non è di discesa se $\nabla f(\bar{x}) = 0$

g non attivo $\Rightarrow \nabla g_1 d = 0$, g attivo $\nabla g_1 d \geq 0$

caso 2) In $\bar{x} \in X$ $g_1(x) \geq 0$ è attivo

e $g_2(x)$ non è attivo

$\Rightarrow g_1(\bar{x}) = 0$ e $g_2(\bar{x}) > 0$



qui non tutte le direz.
sono ammissibili

ragionamento analogo al vincolo
attivo cas. precedente

X direzione di discesa ammissibile se

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) \quad \nabla g_2 = 0 \text{ perché non attivo}, \text{ con } \lambda_1 \geq 0$$

$\Leftrightarrow \nabla f(x)$ e $\nabla g_1(\bar{x})$ sono paralleli

con lo stesso verso

3) In $\bar{x} \in X$ $g_1(x) \geq 0$ non è

attivo e $g_2(x) \geq 0$ e' attivo

$$\Rightarrow g_1(\bar{x}) > 0 \quad ; \quad g_2(\bar{x}) = 0$$

$\Rightarrow$ ~~non~~ linear. Si dimostra ammissibile

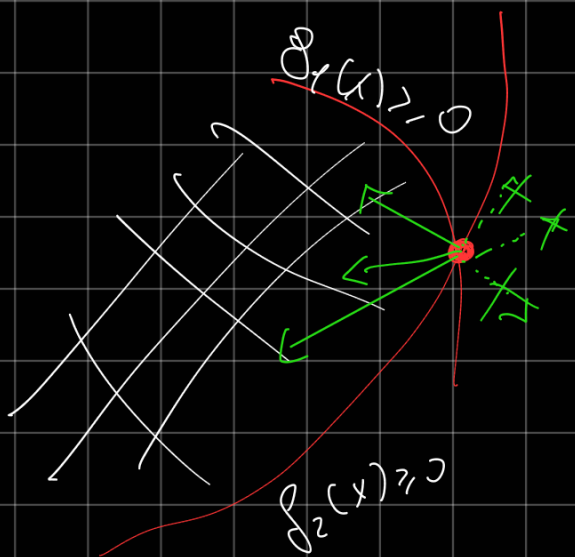
se $\nabla f(\bar{x}) = \lambda_2 \nabla g_2(x)$ con $\lambda_2 \geq 0$

$$\nabla g_1 = 0$$

4) In $\bar{x} \in X$ attivo in

$$g_1(x) \geq 0 \quad e \quad g_2(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1(\bar{x}) = 0 \quad ; \quad g_2(\bar{x}) = 0$$



Quando riesco
a trovare
le condiz. ammissibili?

• $d \in \mathbb{R}^n$ e' direzione ammissibile se

A) $\nabla g_1(\bar{x})^T d \geq 0$ angolo non ottuso

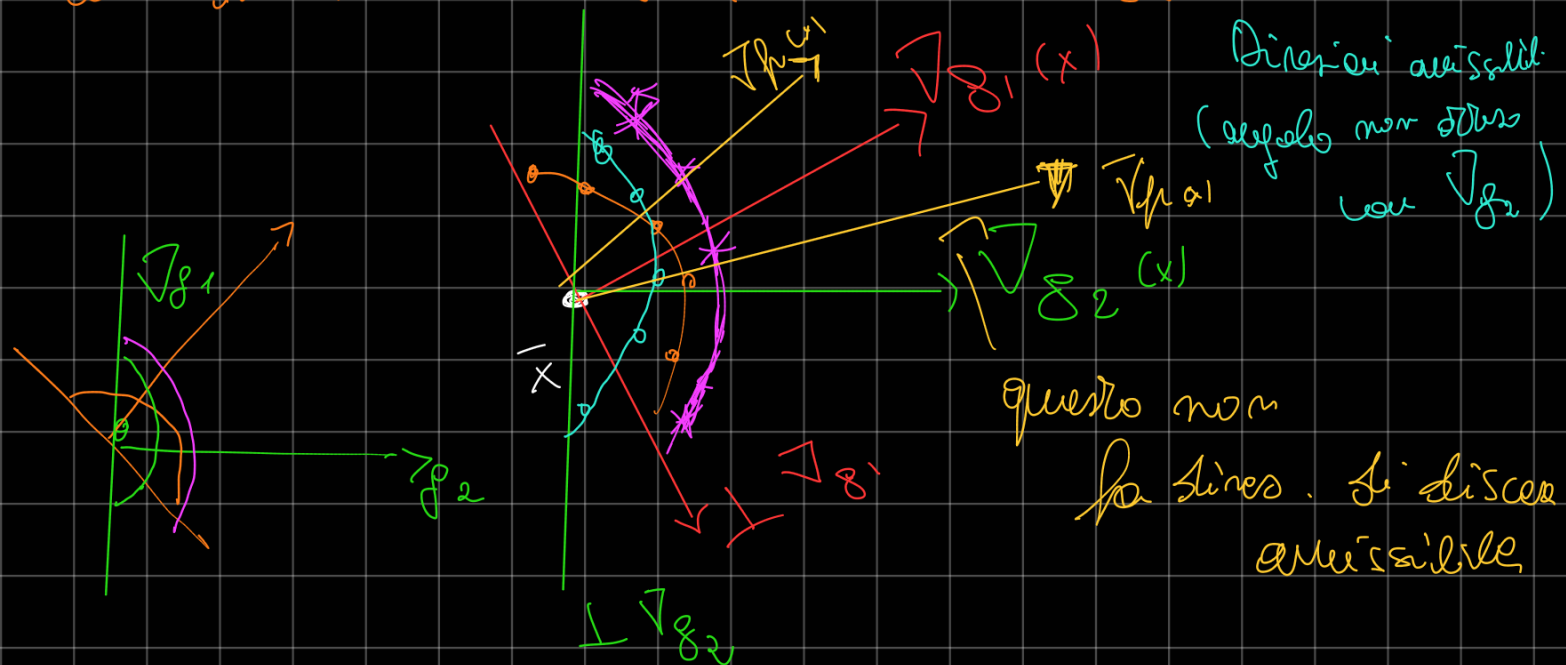
B) $\nabla g_2(\bar{x})^T d \geq 0$

$d \in \mathbb{R}^n$ è direz. di discesa se

c) $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$

vediamo quindi non è
possibile che siano
soddisfatte tutte e 3

direzioni ammissibili (angolo non ottuso con ∇g_1)



• settore ammissibile è quello in comune con i due

• Ora quando si è di discesa?
dipende dal gradiente di f

Posso trovare una direz tra le ammissibili che
sia ottuso rispetto a $\nabla f(x)$?

Sì, devo che $\nabla f(x)$ non sia rif
come punto tra ∇g_1 e ∇g_2 .

potremo sempre un angolo acuto

Se ∇f è combinazione lineare, cioè coeff $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

• L'insieme di discesa ammissibile se $\nabla f(x)$ è contenuto nel cono generato da $\nabla g_1(\bar{x})$ e $\nabla g_2(\bar{x})$, ovvero se

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x})$$

$\nabla f(\bar{x})$ è combinazione
conica di ∇g_1 e ∇g_2

con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Introduciamo allora:

$$\# L(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x)$$

• Funzione Lagrangiana, λ_1, λ_2 moltiplicatori di Lagrange.

$$\Rightarrow \bar{x} \in X$$

$$\min f(x)$$

$$X = \begin{cases} g_1(x) \geq 0 \\ g_2(x) \geq 0 \end{cases}$$

L'insieme di discesa ammissibile in $\bar{x} \in X$

Se annullamento ∇L rispetta $\alpha \times$

$$I) \nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x})$$

$$\text{gradiente della Lagrangiana} - \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}) = 0$$

$$II) \lambda_1 g_1(\bar{x}) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{condizioni} \\ \text{di complementarità} \end{array} \right\}$$

$$III) \lambda_2 g_2(\bar{x}) = 0$$

$\nwarrow$ vincoli attivi

$$IV) \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

I casi precedenti sono considerati nei
casi precedenti.

Caso 1 precedente

$$1) g_1(\bar{x}) > 0; \quad g_2(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \text{entrambi non attivi}$$

$\Rightarrow$ condiz. di complementarità si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

allora la condiz. 1) diventa $\nabla f(\bar{x}) = 0$

$$2) g_1(\bar{x}) = 0 \quad g_2(\bar{x}) > 0 \rightarrow$$

$$\nabla g_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$$

$$\nabla g_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow$ per condiz. Karush $\Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 = 0$

allora la condiz. I) diventa:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x)} \quad \text{con } \lambda_1 \geq 0$$

∇f e ∇g_1 paralleli
e con lo stesso
verso - ma
 ∇g_1 di direzione

3) Speculare $g_2(\bar{x}) = 0 \quad g_1(\bar{x}) > 0$

$$\lambda_2 \neq 0 \quad \lambda_1 = 0$$

$$\boxed{\nabla f(x) = \lambda_2 \nabla g_2(x)} \quad \text{con } \lambda_2 \geq 0$$

4) $g_1(\bar{x}) = 0 \quad g_2(\bar{x}) = 0 \quad \Rightarrow$

combinazione conica

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x)$$

$$\text{con } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad (4)$$

∇f conica conica

Caso generale

$$\min f(x) \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ \vdots \\ h_m = 0 \\ p_{m+1} \geq 0 \end{array} \right\} m \text{ equos.} \quad \text{dove } h_i(x) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad i=1, \dots, m$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{m+2} \geq 0 \\ \vdots \\ p_{m+p} \geq 0 \end{array} \right\} p \text{ diseg.} \quad g_j(x) = R^+ \rightarrow n$$

$j = m+1 \dots m+p$

• FUNZIONE LAGRANGIANA

λ è un vettore h obiettivo

per un problema generale

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda_j g_j(x)$$

simboli di equazione
simboli di diseg.

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ \lambda_{m+1} \\ \vdots \\ \lambda_{m+p} \end{pmatrix}$$

Vettore dei Moltiplicat. di Lagrange

CONDIZIONE DI QUALIFICAZIONE DEI VINCOLI ATTIVI

• $\bar{x} \in X$. Si dice che $\bar{x}$ soddisfa la condiz. di qualificazione dei vincoli attivi se i gradienti dei vincoli attivi calcolati in $\bar{x}$ sono vettori linearmente indipendenti.

insieme ammissibile

$$X \equiv \left\{ x \in R^n : \begin{array}{l} f_i(x) = 0 \quad i=1, \dots, m; \\ f_j(x) = 0 \quad j=m+1, \dots, m+p \end{array} \right.$$

$\nabla f_i, \nabla f_j$ lin. indep.

Prendiamo un punto $\bar{x}$ e individuiamo i vincoli attivi

$\bar{x} \in X$. l'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$,

$I_a(\bar{x})$ è ^{insieme dei vincoli attivi}

$$I_a(\bar{x}) = \left\{ \begin{array}{l} h_i(x) = 0 : i = 1 \dots m \\ g_j(x) \geq 0 : g_j(\bar{x}) = 0 \quad j = m+1 \dots m+p \end{array} \right.$$

• Tutti i gradienti dei vincoli attivi valutati in $\bar{x}$ devono essere vettori linearmente indep.

$$\left\{ \nabla h_1(\bar{x}), \nabla h_2(\bar{x}), \dots, \nabla h_m(\bar{x}) \right\} \cup \left\{ \nabla g_j(\bar{x}) : g_j(\bar{x}) = 0 \quad j = m+1 \dots m+p \right\}$$

unione
tutti i
gradienti
dei vincoli
attivi

Se sono i gradienti tutti

✓ lin. indipendenti $\Rightarrow \bar{x}$ soddisfa le

Condizione di qualificazione dei vincoli
attivi

$\Rightarrow \bar{x}$ è detto PUNTO REGOLARE

$\bar{x}$ punto regolare se tutti i grad. dei vincoli attivi sono lin. ind.

oss. Siano in $\mathbb{R}^n$, ci servono n
vettori lin. indipendenti

Se ho più di n vincoli attivi,

uno o più gradienti sono combinazioni lineari di altri.

Se ci sono più di n vincoli, il punto non è regolare.

1) Se in $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ ho più di n vincoli attivi, allora x non può soddisfare la condizione di qualificazione dei vincoli attivi, ovvero, NON È REGOLARE

2) $\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, e il gradiente di un vincolo attivo in $\bar{x}$ è il vettore nullo, allora $\bar{x}$ non è un PUNTO REGOLARE

CONDIZIONI NECESSARIE DI

MINIMO LOCALE PER PROBLEMI

DI OTTIMIZZAZIONE CON VINCOLATA

(programmazione non lineare)

[CONDIZIONI DI KARUSH-KUHN-TUCKER
o KKT

Sia $x^* \in X$ un minimo locale, e

Sia x^* un PUNTO REGOLARE

allora $\Rightarrow \exists$ un vettore di

moltiplicatori di Lagrange λ :

$$1) \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$$

$$2) h_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$3) g_j(x^*) \geq 0 \quad j = m+1, \dots, m+p$$

$\rightarrow$ associati ai vincoli di disuguaglianza

$$4) \lambda_j \geq 0 \quad \text{per } j = m+1, \dots, m+p$$

per la condiz. conica

$$5) \lambda_j \cdot g_j(x^*) = 0 \quad \text{per } j = m+1, \dots, m+p$$

$\rightarrow$ valgono le condiz. di complementarità per i vincoli di diseg.

CANDIDATI A MINIMO LOCALE

- I punti regolari che soddisfanno le KKT

- Tutti i punti non regolari

le KKT valgono
solo per i punti
regolari