

Punto regolare = punto in cui i grad. dei vincoli attivi sono lin. indep.

Lezione 8

26/10/2010

Se  $x^*$  punto regolare e

$x^*$  minimo locale,  $\exists \lambda$  che verifica le 5 condiz.

# FUNZIONE LAGRANGIANA

f. obj.

vincoli di eq.

vincoli di diseg.

$$L(x, \lambda) = f_0(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda_j g_j(x)$$

deve annullarsi nel pto di minimo

$$1) \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f_0(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) - \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

2) annullabilità

la  $\lambda$  richiede che vincoli di diseg.

la condiz. 1) richiede l'annullamento nel pto  $x^*$

$$4) \lambda_j^* \geq 0 \quad j = m+1, \dots, m+p \quad \text{coef. devono essere non negativi}$$

KKT solo con i punti regolari.

Se supponiamo di avere solo vincoli di diseg. un punto non regolare è comunque un candidato min

$$X = \begin{cases} g_{m+1} \geq 0 \\ \vdots \\ g_{m+p}(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$5) \text{ all'ottimo } g_j(x^*) = 0 \quad \lambda_j^* = 0$$

Le 4 insieme implicano che il gradiente  $\nabla f_0(x^*)$  è una comb. conica dei vincoli

$$1) + 4) \Rightarrow \begin{cases} \nabla f_0(x^*) = \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda_j \nabla g_j(x^*) \\ \lambda_j^* \geq 0 \quad j = m+1, \dots, m+p \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Nel caso in cui  $X$  è definito solo da vincoli di disuguaglianza, le condizioni

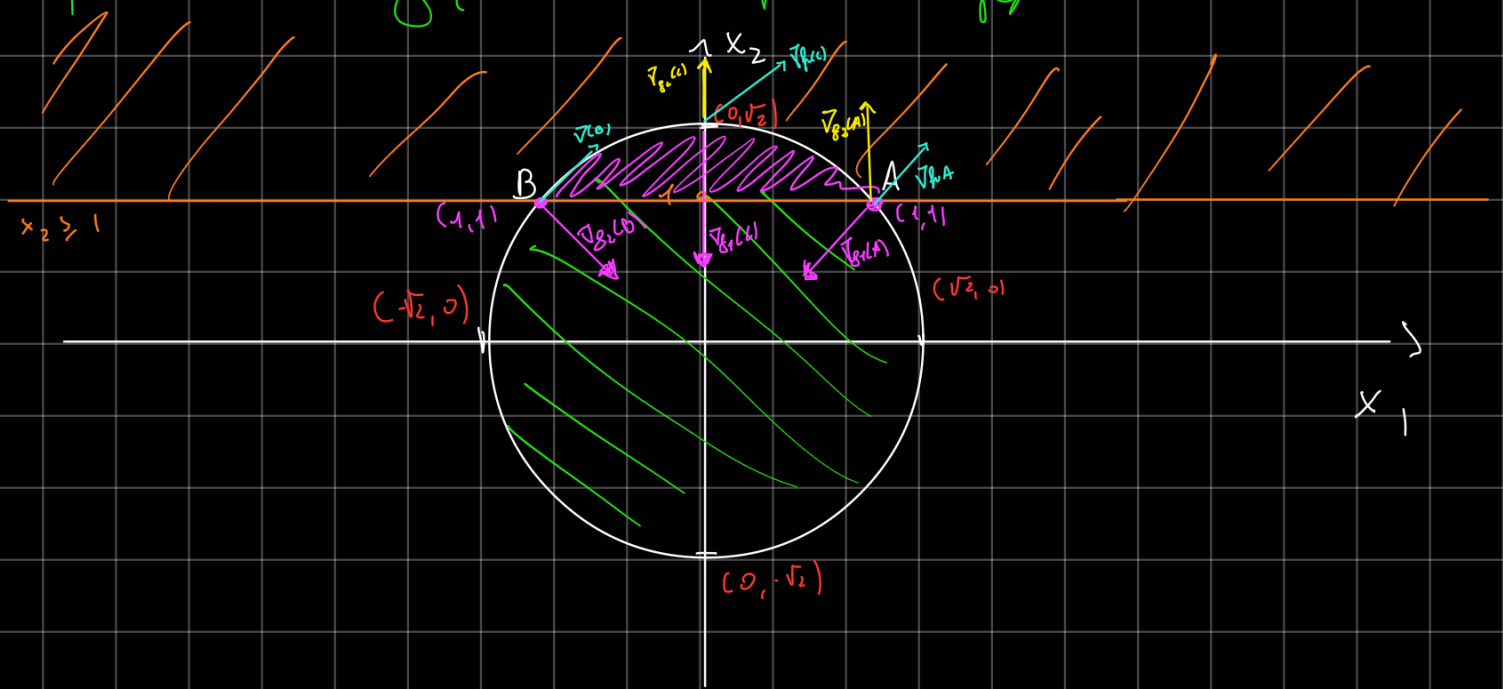
• 1) e 4) implicano che se  $x^*$  è un minimo locale  
 o punto regolare  $\Rightarrow \nabla f(x^*)$  è contenuto nel cono generato dai  
 gradienti di  $g_j$

Come COMBINAZ. CONICA dei  $\nabla g_j(x^*)$  per  $j=m+1, \dots, m+p$   
 $\Leftrightarrow \nabla f(x^*)$  è contenuto nel cono  
 generato dai  $\nabla g_j(x^*)$  per  
 $j=m+1, \dots, m+p$

$$\min x_1 + x_2$$

$$X \equiv \begin{cases} g_1(x) = 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \\ g_2(x) = x_2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

frontiera  $g_1$  = circonferenza di raggio  $\sqrt{2}$



Sostituisco il primo vincolo, visto che la regione soddisf. è quella interna

la regione ammissibile è l'intersezione

la f.o.  $x_1 + x_2$  è minima quando  $x_1$  e  $x_2$  sono minime

$x_2$  deve essere  $\geq 1$

$x_1$  quanto più valore al minimo  $-1$  *vedendo graficamente*

Il punto  $(-1, 1)$  è un minimo globale del problema, perché in quel punto  $x_1$  e  $x_2$  sono al minimo valore possibile

Quindi sono valide le KKT

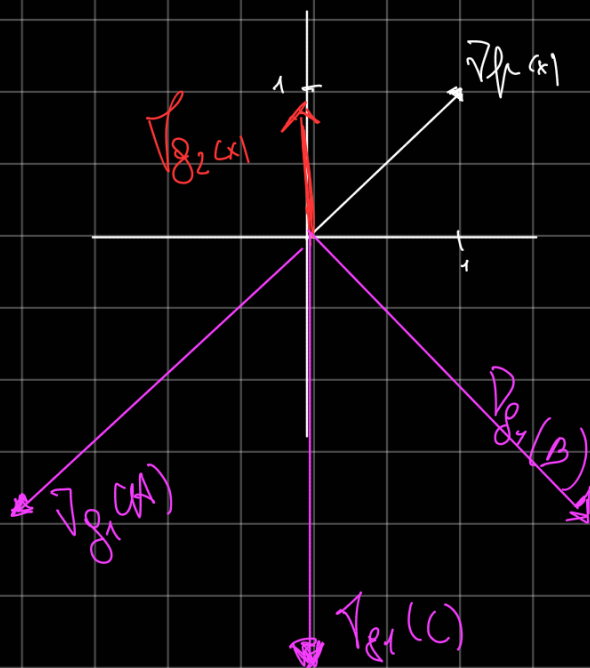
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\nabla$

$$\nabla g_1(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Nel punto B,  $\nabla f(B)$  è collineare

Calcola  $\nabla g_1(B)$  e  $\nabla g_2(B)$

Notare che  $A, B$  e  $C$  sono punti regolari;  
perché i gradienti nei punti sono  
LINEARMENTE INDIP.

• In  $A = (1, 1)$  i vincoli attivi sono  $\underline{g_1(x)} \geq 0$  e  
 $\underline{g_2(x)} \geq 0$ , e

$$\nabla g_1(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \nabla g_2(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sono lin. indep.}$$

$\Rightarrow$   $A$  è regolare. *Candidato a min. loc.*

In  $B$  sono attivi entrambi i vincoli

$$\nabla g_1(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sono lin. indep.}$$

$\therefore$  Allora  $B$  è punto regolare

Il punto  $C$  è attivo solo il vincolo  $g_1(x) \geq 0$ , e

$$\nabla g_1(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{lin. indipendente}$$

$\Rightarrow$   $C$  è punto regolare

• Esempio di punto non regolare che è  
minimo



• le KKT sono condiz. necessarie solo per un punto regolare

$$\min -x_1$$

due erano sempre  $\geq 0$

$$X \equiv \begin{cases} g_1(x) = -(x_1 - 1)^3 - x_2^2 \geq 0 \\ g_2(x) = x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$g_1(x) \geq 0 \longrightarrow -(x_1 - 1)^3 \geq 0 \rightarrow (x_1 - 1)^3 \leq 0$$

$$\Rightarrow x_1 \leq 1 \Rightarrow \text{il valore massimo}$$

di  $x_1$  che soddisfa il primo vincolo è

$$x_1 = 1 \text{ in cui } \underline{\underline{f(x) = -1}} \text{ ha valore } -1$$

Se ho  $x_1 = 1$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \text{ (altrimenti } g_1(x) \geq 0 \text{ non sarebbe soddisfatto)} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$  unico punto possibile quando  $x_1 = 1$

$\hookrightarrow$  soddisfa anche  $g_2(x) \geq 0$

$\Rightarrow (1, 0) \in X$  ed è un minimo globale

(inoltre da considerare su

Vediamo se  $(1,0)$  è un punto regolare  
 perché in quel caso, essendo in minimo,  
 valgono le KKT

vincoli

$(1,0)$  è punto regolare? i vincoli attivi sono  
 $\bullet g_1(x) \geq 0 \bullet g_2(x) \geq 0$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -3(x_1 - 1)^2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}; \nabla g_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑  
 non sono LIN INDIP.

$\Rightarrow A = (1,0)$  non è punto regolare!

Non valgono le KKT. (e neanche servono...)

Verifichiamo che le KKT non possono  
 costruire la LAGRANGIANA

$$L(x, \lambda) = \overset{f(x)}{-x_1} - \sum \lambda_i g_i = -x_1 - \lambda_1 (- (x_1 - 1)^3 - x_2^2) - \frac{1}{2} x_1 x_2$$

$$1) \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3\lambda_1 (x_1 - 1)^2 - \frac{1}{2} \lambda_2 x_2 \\ + 2\lambda_1 x_2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \end{pmatrix}$$

quando  $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

sono entrambi  
 $(0, 0)$   
 calcoli  
 più

$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -1 = 0$  !! IMPOSSIBILE

→ non annulla la

lagrangiana

NON SODDISFA MAI LE KKT

$x^*$  è non Regolare

Per i punti irregolari  
 le KKT non mi dicono  
 nulla

- 1 candidato a minimo Geo segue

• PUNTI NON REGOLARI

• PUNTI REGOLARI CHE SODDISFANO LE KKT

CASO CONVESSO

$\min f(x)$

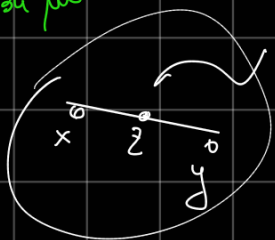
$$X \equiv \begin{cases} f_i(x) = 0 & i = 1 \dots m \\ g_j(x) \geq 0 & j = m+1 \dots m+p \end{cases}$$

$f(x) = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è funzione convessa

$\forall x, y \in X \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

$X$  convesso:  $\forall x, y \in X \Rightarrow z = \lambda x + (1-\lambda)y \in X$

insieme convesso se  
per ogni coppia di punti  
il segmento che  
li collega è  
incluso

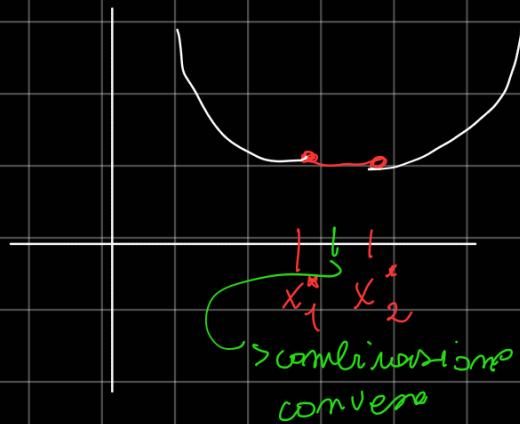
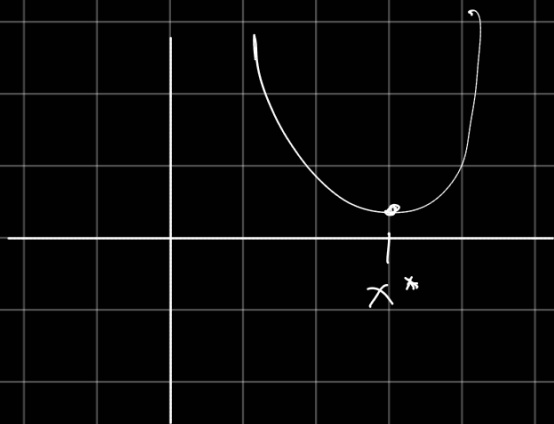


$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in [0, 1]$$

Stessa di un  
caso non vincolato

① Se  $x^*$  è minimo locale  $\Rightarrow x^*$  è minimo globale

② L'insieme dei punti di minimo (globale)  
è CONVESSO



e tutti i punti del segmento  
sono minimi globali

$$z = \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*$$

\* L'insieme dei punti di minimo globale  
è CONVESSO

DIM

$\forall x_1^*, x_2^* \in X$  punti di minimo

globale  $f(x_1^*) = f(x_2^*) = f^*$

• Th  $z = \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*$  con  $\lambda \in [0, 1]$

è un punto di minimo globale,  $f(z) = f^* \rightarrow \min$

• Per Hp la  $f(x)$  è convessa

$$f(z) = f(\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*) \leq \lambda f(x_1^*) + (1-\lambda)f(x_2^*) = f^*$$

$\lambda f^* + f^* - \lambda f^*$   
 $\underbrace{\lambda f(x_1^*)}_{f^*} + \underbrace{(1-\lambda)f(x_2^*)}_{f^*}$

$$\Rightarrow f(z) \leq f^* \Rightarrow f(z) = f^* \Rightarrow z \text{ è min globale}$$

esistono condizioni sulle  $f_i(x)$  e  $g_j(x)$  affinché  $X$  sia convesso?

Quasi  $X$  è convesso?

• Se  $f_i(x)$   $i = 1, \dots, m$  sono funzioni lineari e

$g_j(x)$   $j = m+1, \dots, m+p$  sono funzioni Bili Up

$-g_j(x)$  è convessa ( $g_j(x)$  è concava)  $\Rightarrow$

$$X \equiv \begin{cases} f_i(x) = 0 & i = 1, \dots, m \\ g_j(x) \geq 0 & j = m+1, \dots, m+p \end{cases} \text{ è un insieme convesso}$$

DIM

$X$  insieme convesso se vincoli di ug. sono lineari e i vincoli di disug. sono concavi

$H_p: \mathcal{O} h_i(x) = 0$  è lineare  $\Rightarrow$

$$h_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \quad h_i(x) = 0 \Rightarrow$$

$$a_i^T x + b_i = 0$$

sove  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $\text{scop}$   
non dipende da nessuna variabile

②  $-g_j(x)$  sono convexe  $\forall x, y \in X$

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow -g_j(z) = -g_j(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g_j(x) + (1-\lambda)g_j(y)$$

Th  $X$  è convesso  $\Leftrightarrow$   $\boxed{\begin{matrix} z = \lambda x + (1-\lambda)y \in X \\ \lambda \in [0, 1], x, y \in X \end{matrix}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_i(z) = 0 & i = 1, \dots, m \\ g_j(z) \geq 0 & j = m+1, \dots, m+p \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{lin} \\ \text{convex} \end{matrix}$$

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in [0, 1] \quad h_i(x) = a_i^T x + b_i = 0$$

$$h_i(z) = a_i^T z + b_i = a_i^T (\lambda x + (1-\lambda)y) + b_i$$

$$= \lambda a_i^T x + (1-\lambda) a_i^T y + b_i = 0$$

Poiché  $x, y \in X \Rightarrow \begin{cases} h_i(x) = a_i^T x + b_i = 0 \\ h_i(y) = a_i^T y + b_i = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i^T x = -b_i \\ a_i^T y = -b_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda - (-b_i) + (1-\lambda)(-b_i) + b_i = 0 !!$$

$$\Rightarrow h_i(z) = 0 \Rightarrow z \text{ SODDISFA TUTTI I VINCOLI DI OGGETTO}$$

• ora dimostro che  $z = \lambda x + (1-\lambda)y$  soddisfa i vincoli  $g_j(z) \geq 0$ .

• Per la convenienza dello  $-g_j$  ho

$$-g_j(z) = -g_j(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq -\lambda g_j(x) - (1-\lambda)g_j(y)$$

$\lambda \in [0, 1]$

Poiché  $x, y \in X \Rightarrow \begin{cases} g_j(x) \geq 0 \\ g_j(y) \geq 0 \end{cases}$



$$\Rightarrow \Rightarrow \leq 0 \quad \Rightarrow -1g_f(x) - (1-1)g_f(y) \leq 0$$

$$\Rightarrow -g_f(z) \leq -1g_f(x) - (1-1)g_f(y) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_f(z) \geq 0 \Rightarrow z \text{ soddisfa tutti i vincoli di disuguaglianza}$$

$$\Rightarrow z \in X \text{ e' ammissibile}$$

$$\Rightarrow X \text{ e' convesso} \quad \square$$

$$\bullet \max x_1 + x_2 \quad (-) \min -x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -3 \\ -x_1 + x_2^2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$g_1(x) = x_1 - 4x_2 + 3 \geq 0$$

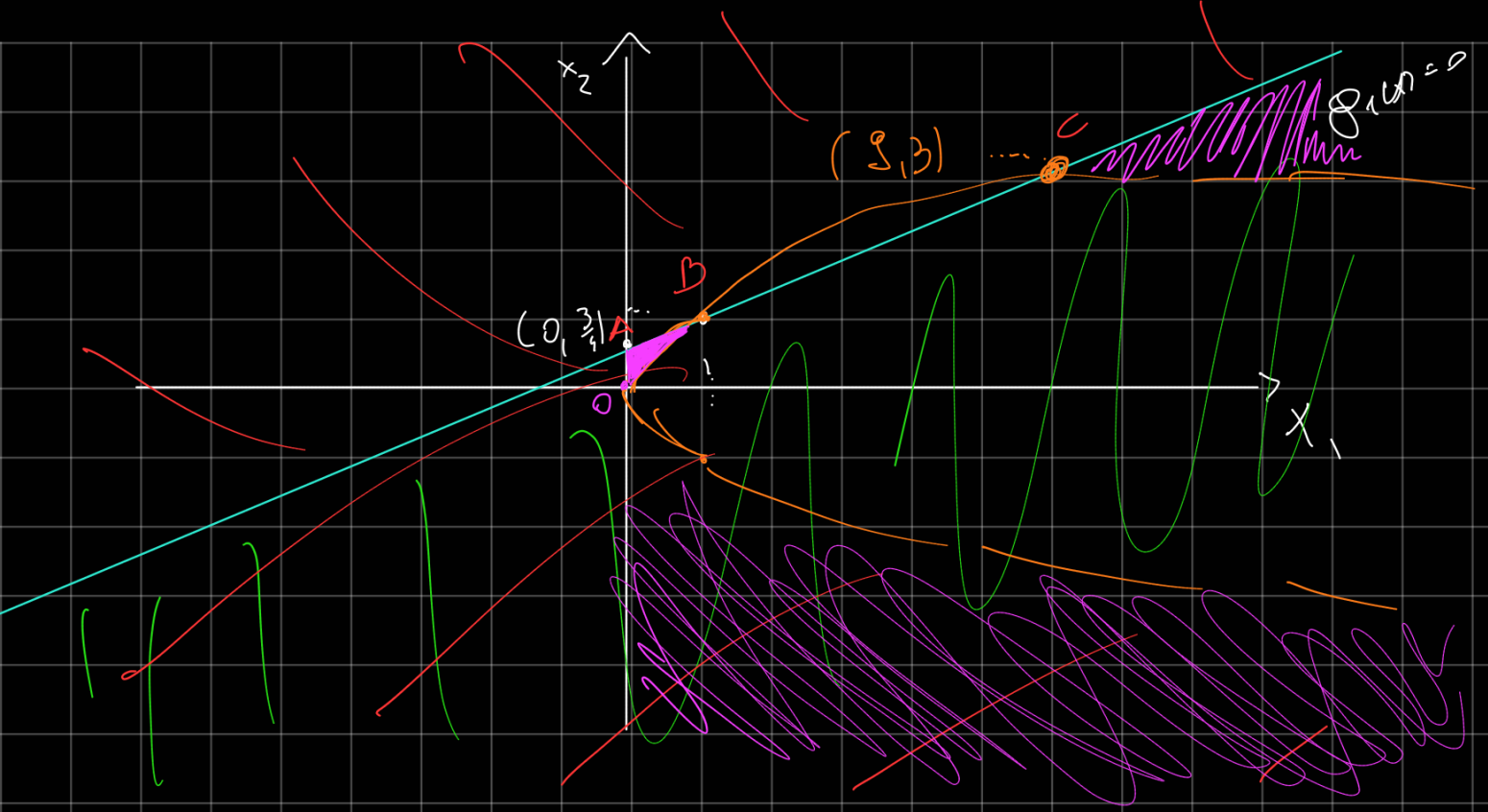
$$g_2(x) = -x_1 + x_2^2 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_1 \geq 0$$

∃ punti di minimo locale?

$$\bullet x_1 - 4x_2 + 3 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ e' soddisfatto per ogni}$$

$$\bullet g_2(x) = 0 \quad -x_1 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2^2$$



ensemble admissible

l'ensemble admissible n'est pas convexe

$$L(x, \lambda) = -x_1 - x_2 - \lambda_1 (x_1 - 4x_2 + x_3) - \lambda_2 (-x_1 + x_2^2) - \lambda_3 x_1$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1^* + \lambda_2^* - \lambda_3^* = 0$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1^* - 2\lambda_2^* x_2^* = 0$$

KKT:

$$g_1(x^*) \geq 0 \quad ; \quad g_2(x^*) \geq 0 \quad ; \quad g_3(x^*) \geq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$\lambda_1^* g_1(x^*) = 0 ; \lambda_2^* g_2(x^*) = 0 ; \lambda_3^* g_3(x^*) = 0$$

Condiz. di complementarità

Si possono distinguere diversi casi

1) Tutti i punti di  $X$  in cui nessun vincolo è attivo.

$$\Rightarrow g_1(x^*) > 0 ; g_2(x^*) > 0 ; g_3(x^*) > 0$$

Tutti i punti interni di  $X$

$$\text{Per le condizioni di complen.} \Rightarrow \lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = -1 = 0 \quad !! \text{ impossibile}$$

[non ho nessun punto che soddisfa le KKT]

\* Nessun punto interno soddisfa LE KKT  $\Leftarrow$

Ci sono punti non regolari?

No, perché nessun vincolo è attivo  $\Rightarrow$

condizioni  $\Rightarrow$  condiz. di qual. dei vincoli  
attivi e barcollante soddisfatte (?)

(2) Punti in cui solo  $g_1(x)$  è attivo

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) > 0 \\ g_3(x) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^* = 0 \\ \lambda_2^* = 0 \end{cases}$$

Punti delle rette

$g_1(x) = 0$  esclusi i punti A, B, C

I punti regolari? Devono verificare solo  $\nabla g_1(x)$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ costante, } \neq 0 \text{ linear.}$$

$\Rightarrow$  tutti i punti in questo caso sono regolari

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \lambda^*) = -1 - \lambda_1^* = 0 \Rightarrow \lambda_1^* = -1 < 0 !!$$

$$\text{MA } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1^* \geq 0 !!$$

$\Rightarrow$  NESSUN PUNTO SODDISFA 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> KKT

deve essere  
positivo

3) Punti in cui solo  $g_2(x)$  è attivo

$$\begin{cases} g_1(x) > 0 \Rightarrow \lambda_1^* = 0 \\ g_2(x^*) = 0 \Rightarrow \lambda_2^* \geq 0 \\ g_3(x^*) > 0 \Rightarrow \lambda_3^* = 0 \end{cases}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{tutti i punti in questo caso sono regolari.}$$

tutti i punti della parabola

tranne OBC e parabola da B a E

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -1 + \lambda_2^* = 0 \Rightarrow \lambda_2^* = 1 \quad \underline{\text{OK!}}$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = -1 - 2x_2^* = 0 \Rightarrow -1 - 2x_2^* = 0$$

$$x_2^* = -\frac{1}{2}$$

parabola

$$\Rightarrow g_2(x^*) = -x_1 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Punto A} = \left( \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right)$$

Punto regolare che soddisfa le KKT, è un candidato a MINIMO LOCALE

4) Punti in cui solo  $g_3(x)$  attivo

$$\begin{cases} g_1(x^*) > 0 \Rightarrow \lambda_1^* = 0 \\ g_2(x^*) > 0 \Rightarrow \lambda_2^* = 0 \\ g_3(x^*) = 0 \end{cases}$$

È punti non regolari?

$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$  lin. indep.  $\Rightarrow$  tutti i punti

in questo caso sono regolari

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -1 - \lambda_3^* = 0 \Rightarrow \lambda_3^* = -1 \quad \text{!} \quad \text{IMPOSS.}$$

$\lambda_3 \geq 0$

non soddisfa la KKT

5 Punti in cui solo  $g_1(x) \geq 0$  e  $g_2(x) \geq 0$  sono

soliti  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} g_1(x^*) = 0 \\ g_2(x^*) = 0 \\ g_3(x^*) > 0 \end{cases}$$

Punti di intersezione  
tra le due rette  
e la parabola

$\Rightarrow$  punti:  $B = (1, 1)$ ;  $C = (3, 3)$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

• I punti sono regolari?

$$B \Rightarrow \nabla g_1(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono lin. indep.  $\Rightarrow$  B regolare

$$c \Rightarrow \nabla_{g_1}(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla_{g_2}(c) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

lin indep.  $\Rightarrow c$  regular

$$B = (1, 1) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = -1 - \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0 & (x_2) \\ \frac{dL}{dx_2} = -1 + 4\lambda_1^* - 2\lambda_2^* = 0 & \text{Summa} \end{cases}$$

$$-3 + \lambda_1^* = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1^* = \frac{3}{2} > 0 \quad \text{OK!}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{5}{2} \quad \text{OK!!}$$

$\Rightarrow$  Punto e' um ponto regular que

satisfaz as KKT  $\Rightarrow B$  e candidato a min  $L(x)$

$$c = (9, 3) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = -1 - \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0 & (x_4) \\ \frac{dL}{dx_2} = -1 + 4\lambda_1^* - 6\lambda_2^* = 0 \end{cases}$$



$$= -5 - 2x_2 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2} < 0$$

C è un punto regolare che NON

SODDISFA LE KKT  $\Rightarrow$  C NON PUO' ESSERE MIN LOE

fonte loc.  $\mathcal{Q}$  in cui abbiamo continuo dominio

Caso 6. Sblo  $g_2(x)$  e

$g_3(x)$  sono attivi

$$\begin{cases} g_2(x) = 0 \\ g_3(x) = 0 \\ g_1(x) \geq 0 \end{cases}$$

Il punto  $\theta = (0, 0)$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ +2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NON SONO LIN INDIP

$\Rightarrow$

$\theta = (0, 0)$  non e' un punto  
regolare  $\Rightarrow$  candidato minimo.

Exo 7 Solve  $g_1(x) \geq 0$  e  $g_3(x) \geq 0$

Cono di coni

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) > 0 \\ g_3(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = 0$$

il punto  $A = (0, \frac{3}{4})$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Lin indep.}$$

$\Rightarrow$  A punto regolare

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(A, \lambda^*) = -1 - \lambda_1^* + \cancel{\lambda_2^*} - \lambda_3^* = 0$$

$\lambda_3 = -\frac{1}{9} < 0!$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x^2}(A, \lambda^*) = -1 + 4\lambda_1^* = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4}$$

KKT non soddisfatte.

No candidato

Caso 2 tutti i v.a. ad ott.

Non  $\exists$  nuovo punto.

Candidati a minimo sono

$$B = (1, 1), \quad O = (0, 0)$$

$$\min 2x_1^3 + 3x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$2x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0$$

Caso Successo in  $A = (-1, 0), B = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$$C = (0, 1)!$$

Sono candidati a minimo

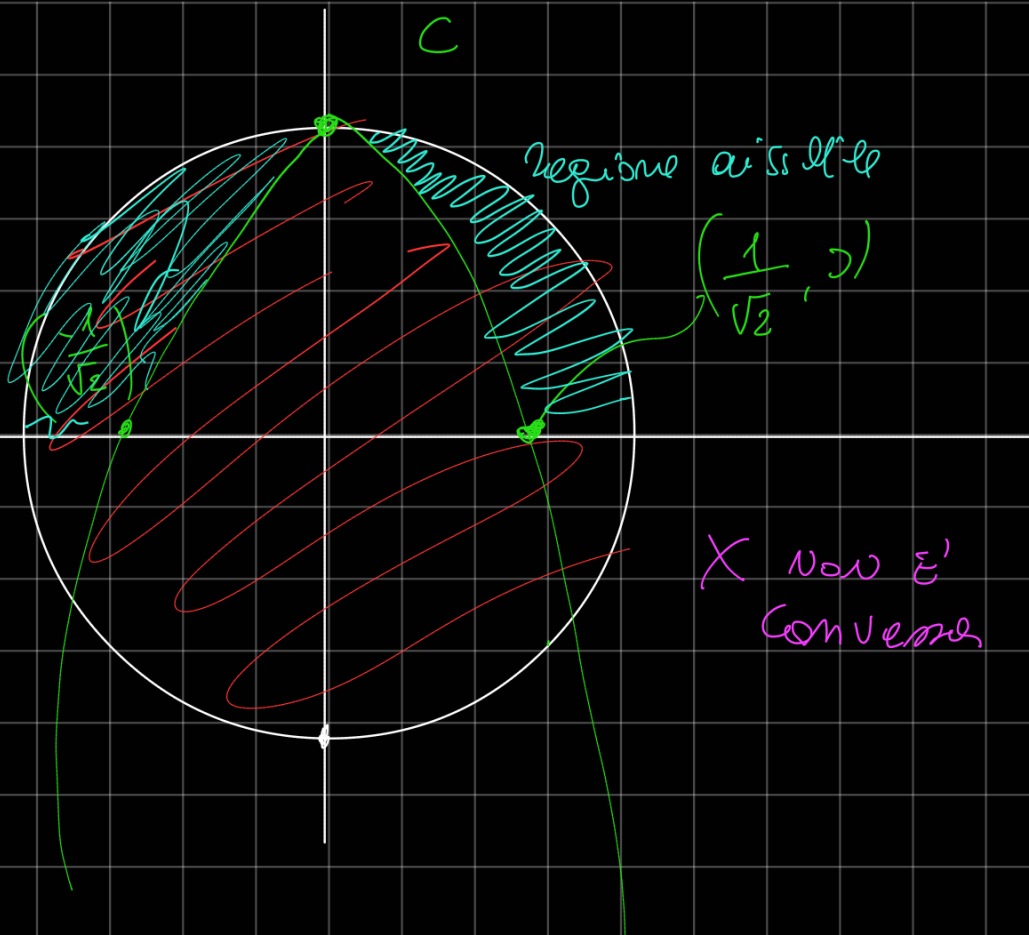
$$\min 2x_1^3 + 3x_2$$

$$f_1(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$f_2(x) = 2x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1 + 1$$

ESERCIZIO 10

Vertice  $(0,1) \in C$   
parabola



Funzione Lagrangiana

$$L(x, \lambda) = \underbrace{2x_1^3 + 3x_2}_{g_1(x)} - \lambda_1 \underbrace{(1 - x_1^2 + x_2^2)}_{g_2(x)} - \lambda_2 \underbrace{(2x_1^2 + x_2 - 1)}_{g_2(x)}$$

KKT

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 - 4\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 - 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 (1 - x_1^2 - x_2^2) = 0; & \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 (2x_1^2 + x_2 - 1) = 0; & \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Condiz. di complementarità

$$\begin{cases} g_1(x^*) \geq 0 \\ g_2(x^*) \geq 0 \end{cases}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ora controlliamo i punti

Punto  $A = (-1, 0)$ , è attivo solo  $g_1(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) > 0 \end{cases}$$

È un punto regolare?

$$\nabla g_1(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow A \text{ è un punto regolare}$$

KKT  $\lambda_2^* = 0 \Leftrightarrow \lambda_2^* g_2(x^*) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 - 2\lambda_1^* + \lambda_2^* = 0 \Rightarrow 3 = 0 !!$$

imposs.

A non soddisfa le KKT

A non ammette la  $\nabla$  A non può essere minimo della Lagrangiana

PUNTO B =  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$\begin{cases} g_1(x) \geq 0 & \text{non attivo} \\ g_2(x) & \text{attivo} \end{cases}$$

Punto regolare?

$$\nabla g_2(B) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \underline{\text{B è regolare}}$$

Applico le  $KKT$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{6}{2} + 2 \underset{0}{\lambda_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \lambda_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 - \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

impossibile  $\rightarrow$

$\Rightarrow$  B non può essere un locale, non soddisfa  $KKT$

Punto C =  $(0, 1)$

Sono attivi

$$\begin{aligned} g_1(x) &> 0 \\ g_2(x) &> 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \end{cases} \quad \text{further explore!}$$

$$\nabla g_1(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$C$  NON È REGOLARE,  $c \in I$

CANDIDATO MINIMO