

Quando le espressioni sono complicate non usiamo la KKT ma metodi iterativi, algoritmi per trovare i punti

ALGORITMI PER PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

VINCOLATA

$$\min f(x)$$

$$x \in X \equiv \begin{cases} h_i(x) = 0 & i = 1 \dots m \\ g_j(x) \geq 0 & j = m+1 \dots m+p \end{cases} \quad \parallel \rightarrow$$

$$\parallel \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \quad \parallel F(x) \text{ è definita in modo tale che i punti di minimo di } F(x) \text{ sono anche minimi di } f(x)$$

algoritmi per trasformare la f principio vincolata, in una non vincolata

FUNZIONI DI PENALITÀ QUADRATICHE

$$\min f(x)$$

$$x \in X = \begin{cases} h_1(x) = 0 \\ h_2(x) = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) = 0 \end{cases}$$

$$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}$$

vettore con
m vincoli

Definisco una Funzione $F(x)$ nel seguente modo

$$F(x) = h(x) + \rho \cdot p(h_1(x); h_2(x); \dots; h_m(x))$$

$p(h(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se } h(x) = 0 \\ \alpha > 0 & \text{se } h(x) \neq 0 \end{cases}$

ovvero se $\rho \in \mathbb{R}^+$
 $x \in X$

Termine di penalità, mi penalizzo se non prendo $x \in X$
non vedo la soluzione

se $x \notin X$, esiste qualche vincolo che non soddisfa qualcosa

$$\min F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

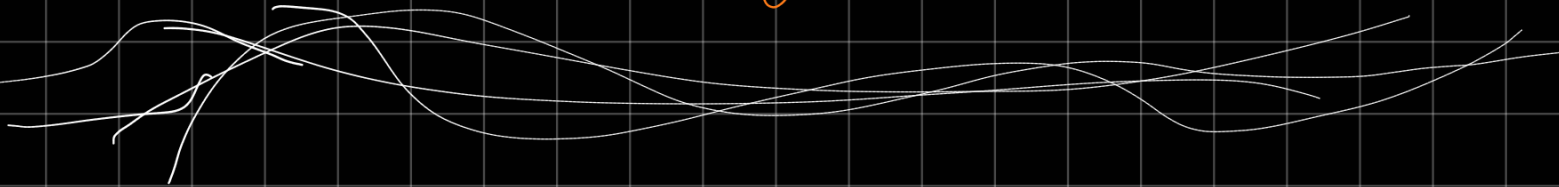
quando ρ/α sono molto grandi, il valore $F(x)$ si discosta molto dalla funzione obiettivo di un termine positivo molto grande

$p(h(x))$ funzione di penalità, mi penalizzo se sono fuori dal vincolo

Si può dimostrare che quando $\rho \rightarrow +\infty$ i punti di minimo di $h(x)$ e $F(x)$ coincidono

$$p(h(x)) = \sum_{i=1}^m (h_i(x))^2 \quad \text{se } x \in X, \quad h(x) = 0$$

e se ho vincoli di disuguaglianza?



METODI DI BARRIERA

METODI AI PUNTI INTERNI

$$\min f(x)$$

$$x \in X \equiv \begin{cases} g_1(x) \geq 0 \\ g_2(x) \geq 0 \\ \vdots \\ g_p(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{pmatrix}$$

$F(x)$ è definita come

$$F(x) = f(x) + \epsilon v(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$$

$$\epsilon \in \mathbb{R}^+$$

$v(g(x))$ è una funzione che tende a $+\infty$ quando

$$g(x) \rightarrow 0.$$

$$v(g(x)) \rightarrow +\infty \quad \text{quando}$$

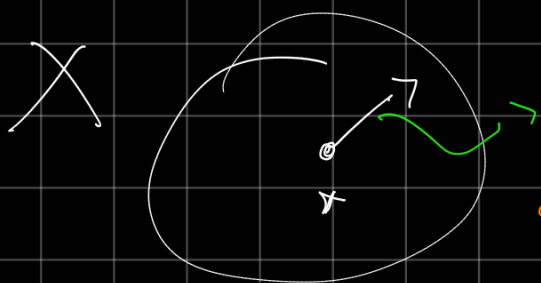
Cioè quando i vincoli sono
 $= 0$

$$g(x) \rightarrow 0$$

mi sto muovendo
in punti dove i vincoli

mi sto muovendo
dalla
frontiera ammissibile

tendendo ad essere
pubblicher



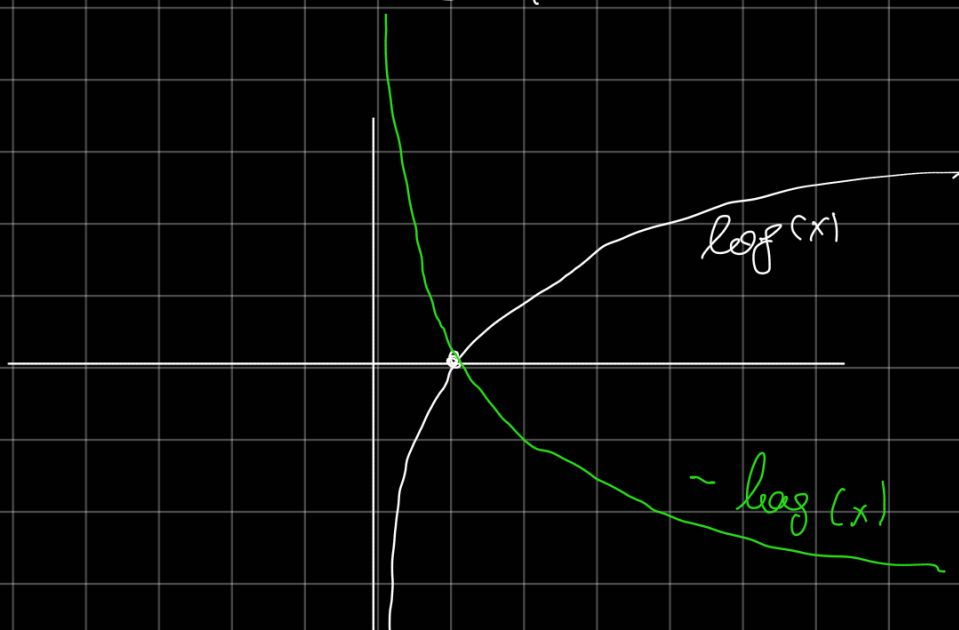
$v(g(x))$ cresce

effetto
di barriera
che scoraggia
lo spostamento
dove la
frontiera

quando da un punto
interno di X mi avvicino
alla sua frontiera

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x)$$

$$v(g(x)) = - \sum_{j=1}^p \log(g_j(x))$$



Per ϵ suff. grande, coincidono i minimi con
quelli di $f(x)$

Regole Moltiplicatori Lagrange

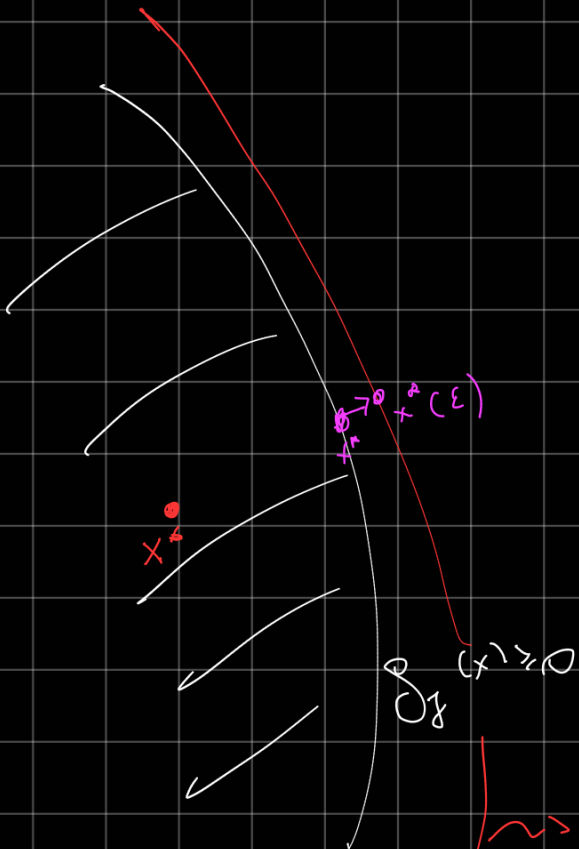
Misurano la sensibilità di $f(x)$ alla
variazione del vincolo associato a quel moltiplicatore

$\lambda \in \mathbb{C}^*$ vettore dei moltiplicatori di

perché le che le kkt sono rispettate

$$I^* = \begin{pmatrix} I_1^* \\ I_2^* \\ \vdots \\ I_{m-1}^* \\ -I_m^* \end{pmatrix}$$

$$g_f(x) \geq 0 \iff \exists \lambda_f \left(\lambda_f^* \right)$$



Impoco di olio

$$\mathcal{L}_D(x) \geq 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow g_f(x) \geq \underbrace{-\varepsilon}_{\substack{0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R}}} \underbrace{\| \nabla g_f(x^*) \|}_{0} < 0$$

$\sim \exists \delta(x) \geq -\epsilon \quad \|\nabla g_\delta(x^*)\|$
 mögliches Argument

x^* minimo locale, sub int. della regione ammissibile
Se pertando il vincolo, la regione ammissibile, x^* rimarrà minimo loc. ex?

Se peraltro il vincolo, la versione ammissibile, x^* vincola minimo loc. ex?

Caso I x^* è interno ad X , e $g(x) \geq 0$ non
 è attivo in x^* $\Rightarrow g(x^*) > 0$

$\Rightarrow$ per le condizioni di complementarità

$$\lambda_1^* g(x^*) = 0, \text{ ci ha che } \lambda_1^* = 0$$

② Caso II $g(x) \geq 0$ è attivo in x^*
 $\Rightarrow g(x^*) = 0$

$$x^* \rightsquigarrow x^*(\varepsilon)$$

$$f(x^*) \rightsquigarrow f(x^*(\varepsilon))$$

$\hookrightarrow$ perturbando la
 frontiera, cambia il punto
 di minimo e anche
 il valore della
 f di ottimo cambia

③ Si può dimostrare che la variazione
 della funzione obiettivo è data da

$$\frac{df(x^*)}{d\varepsilon} = -\lambda_1^* \|\nabla g(x^*)\|$$

moltiplicazione di Lagrange
 del vincolo $g(x) \geq 0$ in x^*

$\Rightarrow$ Se λ_1^* è grande $\Rightarrow$ la variabile f è grande
Se λ_1^* è piccolo $\Rightarrow$ la variabile f è piccolo

$\Rightarrow$ Il moltiplicatore λ_1^* esprime la sensibilità della funzione allo perturbazioni del vincolo $g_1(x) \geq 0$

Lemma $g_1(x) \geq 0$ non è attivo in x^* $\Rightarrow \lambda_1^* = 0$ si ha

$$\frac{dP(x)}{d\epsilon} = -\lambda_1^* \|\nabla g_1(x^*)\| = 0$$

$\Rightarrow$ Nel caso I la funzione obiettivo non è sensibile alla variazione del vincolo

VEDI FINE LEZ 8
Per fine esercizio

PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$\min f(x)$ $\longrightarrow$ funzione lineare

$x \in X$ $\longrightarrow$ descritto da un insieme di equazioni e disequazioni lineari

- Una funzione lineare è sia una funzione convessa che concava

$$f(x) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le variabili

$C_1, C_2, \dots, C_n$ sono i coeff. delle variabili

inforti

f è slice convessa se $\forall x, y \in X$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

dove $\lambda \in [0, 1]$

Se

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

e faccio combinarsi. Comincio

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \\ \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = C_1 [\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1] +$$

$$|| C_2 [\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2] + \dots + C_n [\lambda x_n + (1-\lambda)y_n]$$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = C_1 \lambda x_1 + (1-\lambda)C_1 y_1 +$$

$$\lambda C_2 x_2 + (1-\lambda)C_2 y_2 + \dots + \lambda C_n x_n + (1-\lambda)C_n y_n$$

sono uguali

UNA FUNZIONE LINEARE
È CONCAVA

f concava Se $\forall x, y \in X$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$\Rightarrow$ una f lineare è concava

Come saw fatti gli insiem' ammissibili!

Nella Programmazione Lineare

$$X = \begin{cases} h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) = 0 \\ g_{m+1}(x) \geq 0 \\ \vdots \\ g_{m+p}(x) \geq 0 \end{cases}$$

$h_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\hookrightarrow$ funzioni lineari

$g_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\hookrightarrow$ funzioni lineari

Teo precedente...

Se h_i lineari e $g_j(x)$ sono concave...

allora X è convesso

funzioni sia
concave che convexe

$\Rightarrow X$ è CONVESSO

$\min f(x) \rightarrow$ lineare $\rightarrow$ convesso

$x \in X \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{derivato della eq. e} \\ \text{diseg. lineari} \end{array} \right. \parallel \Rightarrow$ insieme CONVESSO

- $\Rightarrow$
- 1) Se x^* è un minimo locale
 $\Rightarrow x$ è un minimo GLOBALE
 - 2) insieme di tutti i minimi locali è convesso

Si può dimostrare che
le condizioni KKT sono condizioni
necessarie e sufficienti di minimo
globale anche per i problemi non regolari.

