RICERCA OPERATIVA

0)

$$\min f(x) \qquad f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x \in X \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Funzione obiettivo

Insieme ammissibile

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Casi particolari:

1) $X = \emptyset \implies$ Problema inammissibile

2) $\forall M > 0 \quad \exists \bar{x} \in X : f(\bar{x}) < -M$

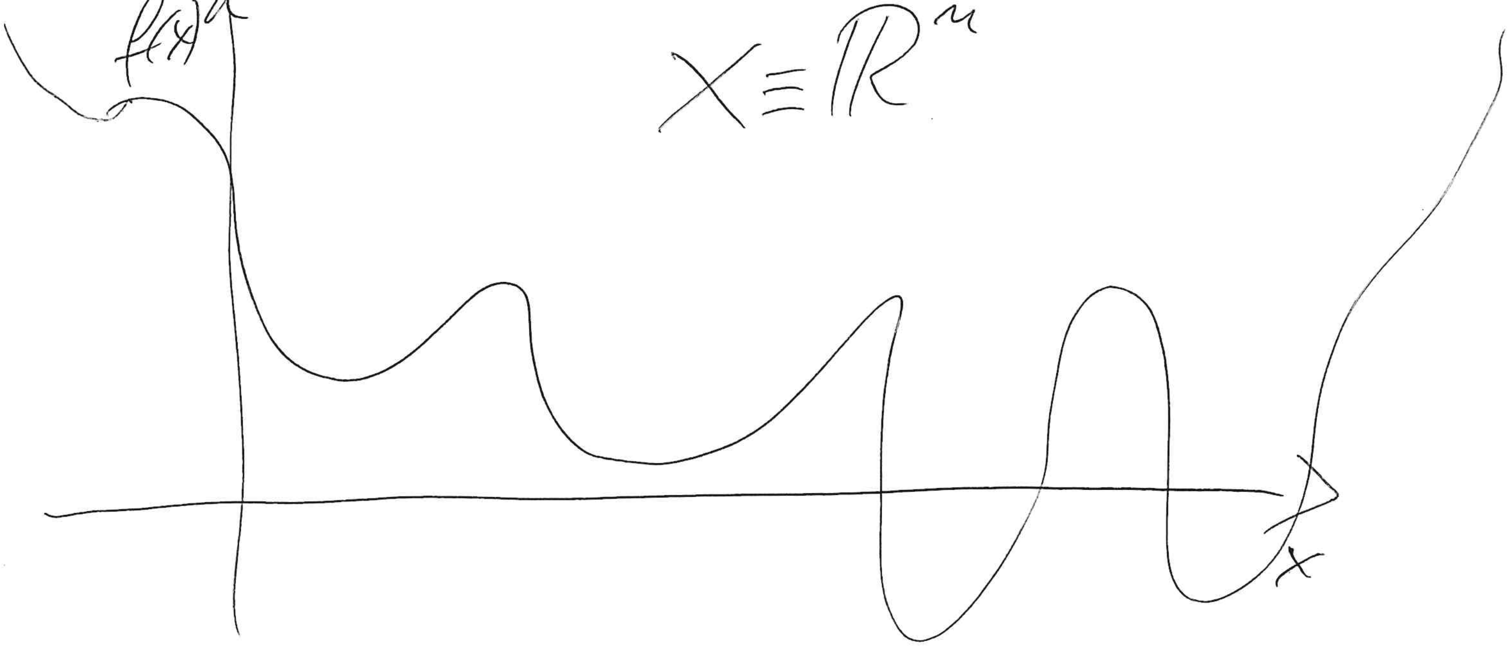
$M \in \mathbb{R}$

$\implies$ Problema illimitato

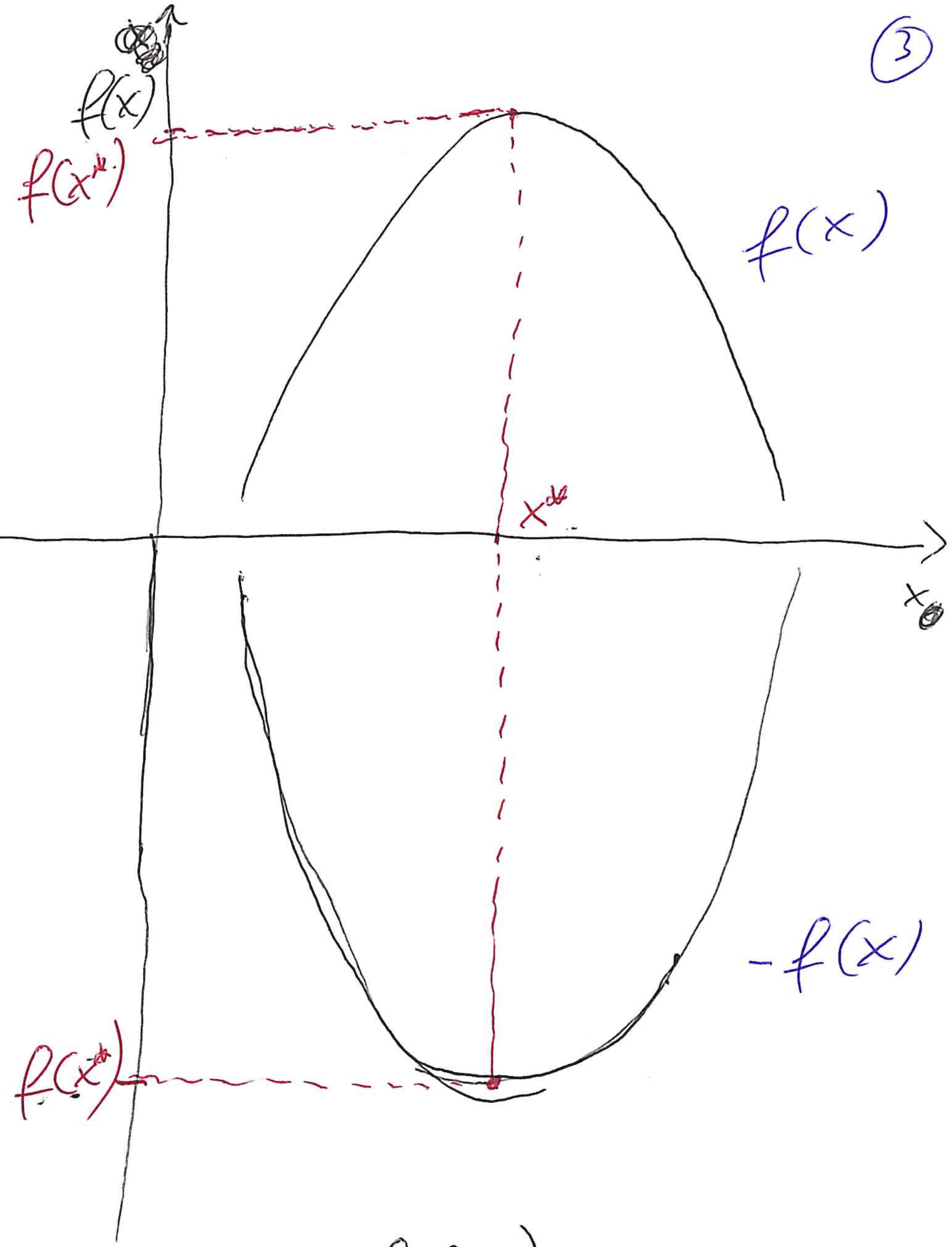
$$\min f(x)$$
$$x \in X$$

1) $X \equiv \mathbb{R}^n \Rightarrow$ Problema di ottimizzazione non vincolata

2) $X \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ Problema di ottimizzazione vincolata



$$\max_{x \in X} f(x)$$

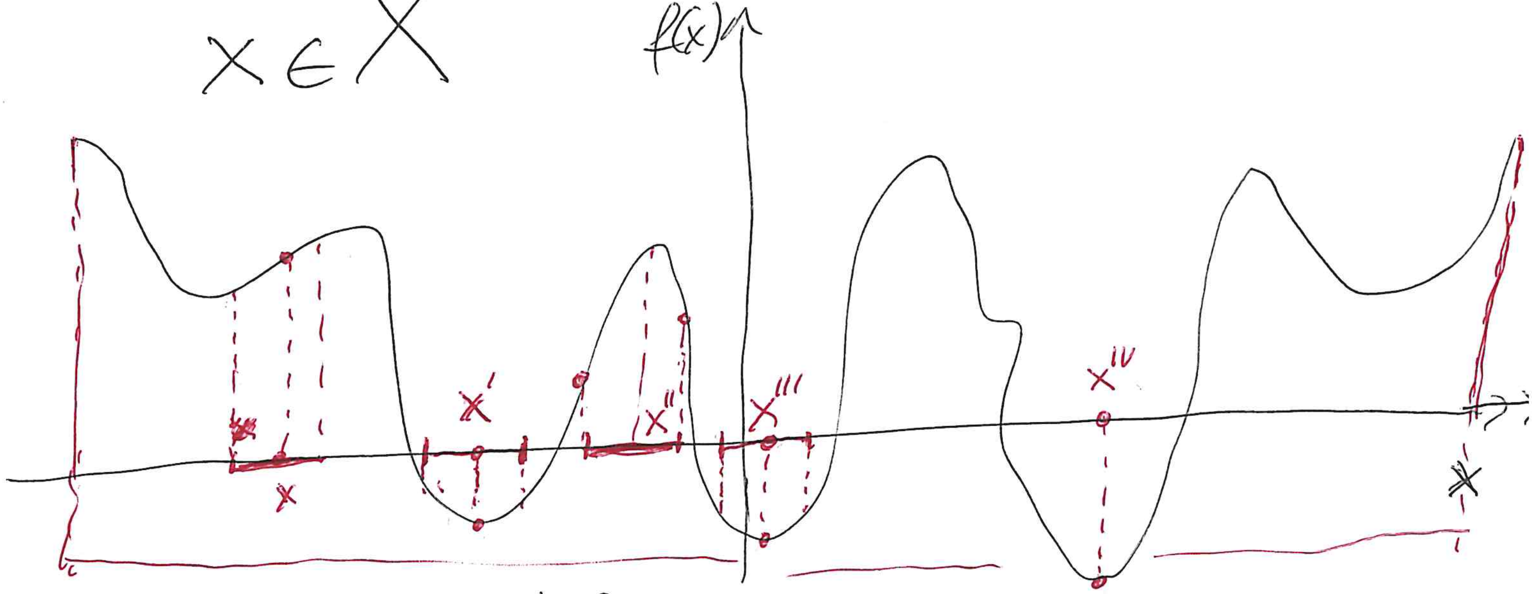


$$\min_{x \in X} -f(x)$$

$$\max_{x \in X} f(x) \equiv -\min_{x \in X} -f(x)$$

$\min f(x)$ $\quad f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \in X$



DEF. DI PUNTI DI MINIMO DI $f(x)$

- $x^* \in X$ si dice punto di minimo globale se $\forall x \in X$ si ha $f(x^*) \leq f(x)$

  ($f(x^*) < f(x) \Rightarrow$ x^* è un minimo globale stretto)

- $x^* \in X$ si dice punto di minimo locale se $\exists\, I(x^*, \varepsilon)$ tale che $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in I(x^*, \varepsilon)$

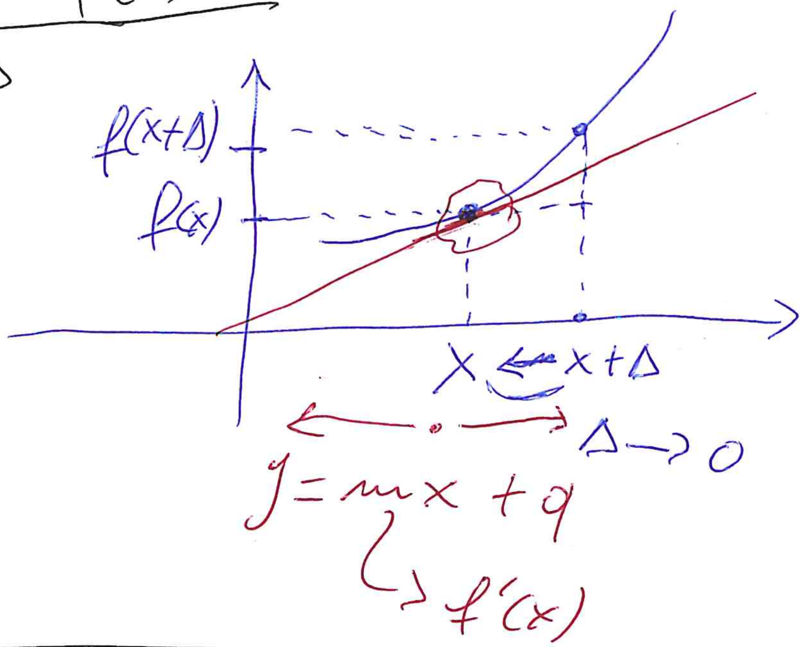
  (se $f(x^*) < f(x) \Rightarrow x^*$ è un minimo locale stretto)

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

derivata della $f(x)$ in un punto x è:

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$



$f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R}^n$

$f(x_1, x_2): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

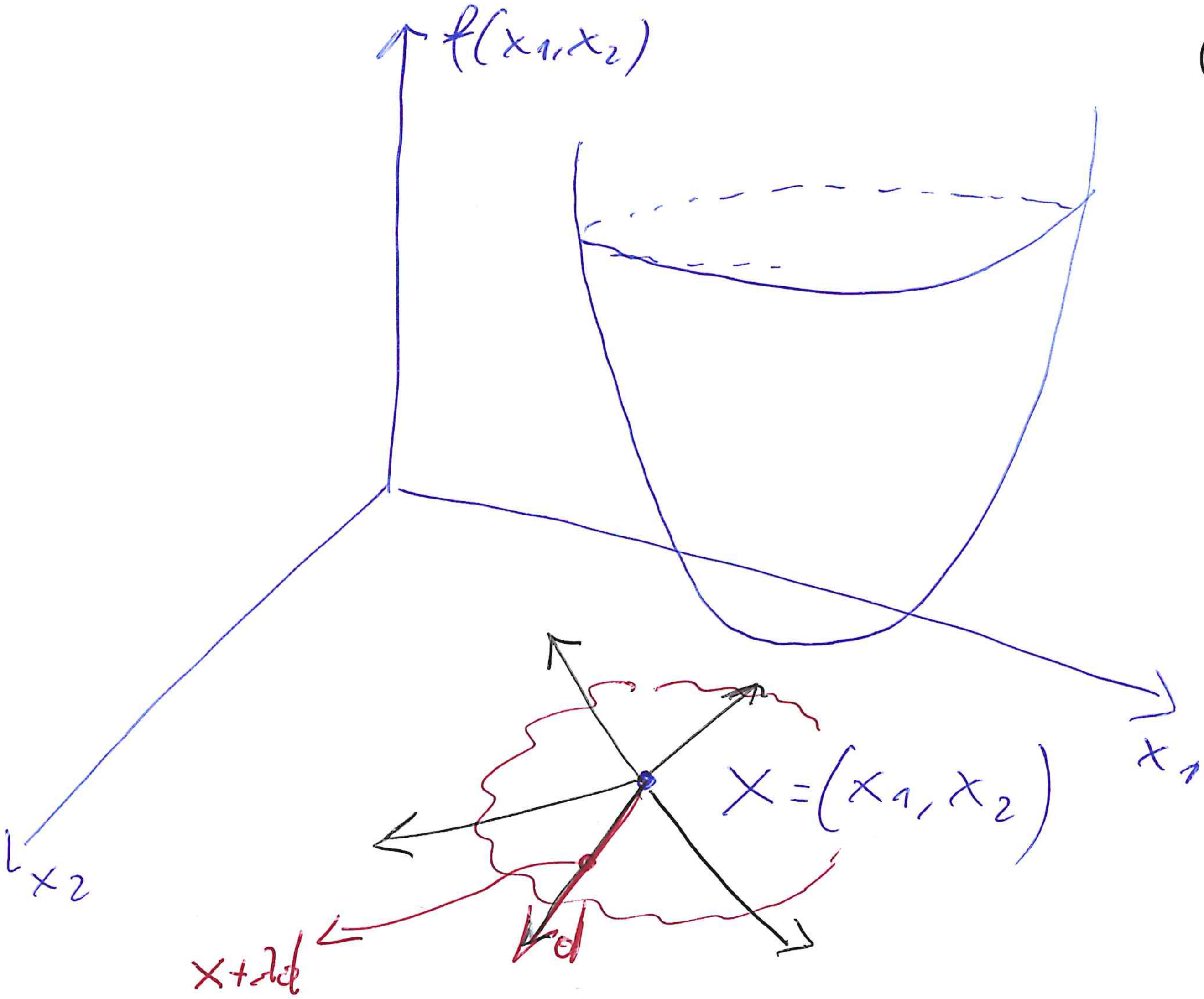
$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ — componente i-esima di d

$\Rightarrow$ la derivata direzionale di $f(x)$ secondo d è $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$

Derivata parziale della $f(x)$ rispetto ad x_i

GRADIENTE DI $f(x)$ calcolato in x

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$



DERIVATA DIREZIONALE DI $f(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \rightsquigarrow x + \lambda d$

$d \in \mathbb{R}^n$ direzione
$\lambda \in \mathbb{R}$ spostamento
$x \in \mathbb{R}^n$

La derivata direzionale di $f(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ calcolata nel punto secondo la direzione d è:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f''(x)$ Derivata seconda

$f(X): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Hp $f(x)$ 2 volte continuamente differenziabile

x_i e x_j

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \, \partial x_j} =$$ derivata parziale II della $f(x)$ derivata prima rispetto ad x_i e poi rispetto ad x_j

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_j \, \partial x_i}$$ Teorema SCHWARTZ

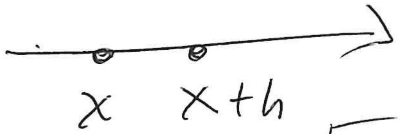
MATRICE HESSIANA DI $f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Formula di TAYLOR

$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad h \in \mathbb{R}$$



$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \beta_1(x,h)$$

Arrestata ai termini del 1° ordine

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta_1(x,h)}{h} = 0$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \beta_2(x,h)$$

Arrestata ai termini del 2° ordine

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta_2(x,h)}{h^2} = 0$$

Formule di TAYLOR

$f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n \quad h \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

$x \longrightarrow x+h$

$$\underbrace{f(x+h)}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\nabla f(x)^T h}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\beta_1(x,h)}_{\in\mathbb{R}}$$

Arrestate ai termini del 1° ordine

$$\nabla f(x)^T h = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \dots ; \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\beta_1(x,h)}{\|h\|} = 0$$

$$\underbrace{f(x+h)}_{\in\mathbb{R}} = f(x) + \nabla f^T(x) h + \underbrace{\frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h}_{\in\mathbb{R}} + \beta_2(x,h)$$

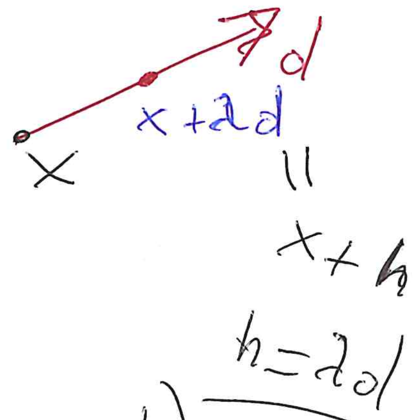
Arrestate ai termini del 2° ordine

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta_2(x,h)}{\|h\|^2}$$

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \begin{pmatrix} \nabla^2 f(x) \\ n \times n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Derivata direzionale di $f(x)$ in x rispetto alle direzione d

$f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n \quad d \in \mathbb{R}^n$



$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}}$$

$$f(x+\lambda d) = f(x) + \lambda \nabla^T f(x) d + \beta_1(x, \lambda, d)$$

$$\frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda} = \frac{\cancel{\lambda} \nabla^T f(x) d}{\cancel{\lambda}} + \frac{\beta_1(x, \lambda, d)}{\lambda}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}} = \lim_{\lambda \to 0^+} \left(\nabla^T f(x) d + \cancel{\frac{\beta_1(x, \lambda, d)}{\lambda}} \right)$$

$$= \nabla f(x)^T d$$

!!

$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ $\qquad x^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_3 x^{(3)} + \ldots + \lambda_k x^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$$

COMBINAZIONE LINEARE

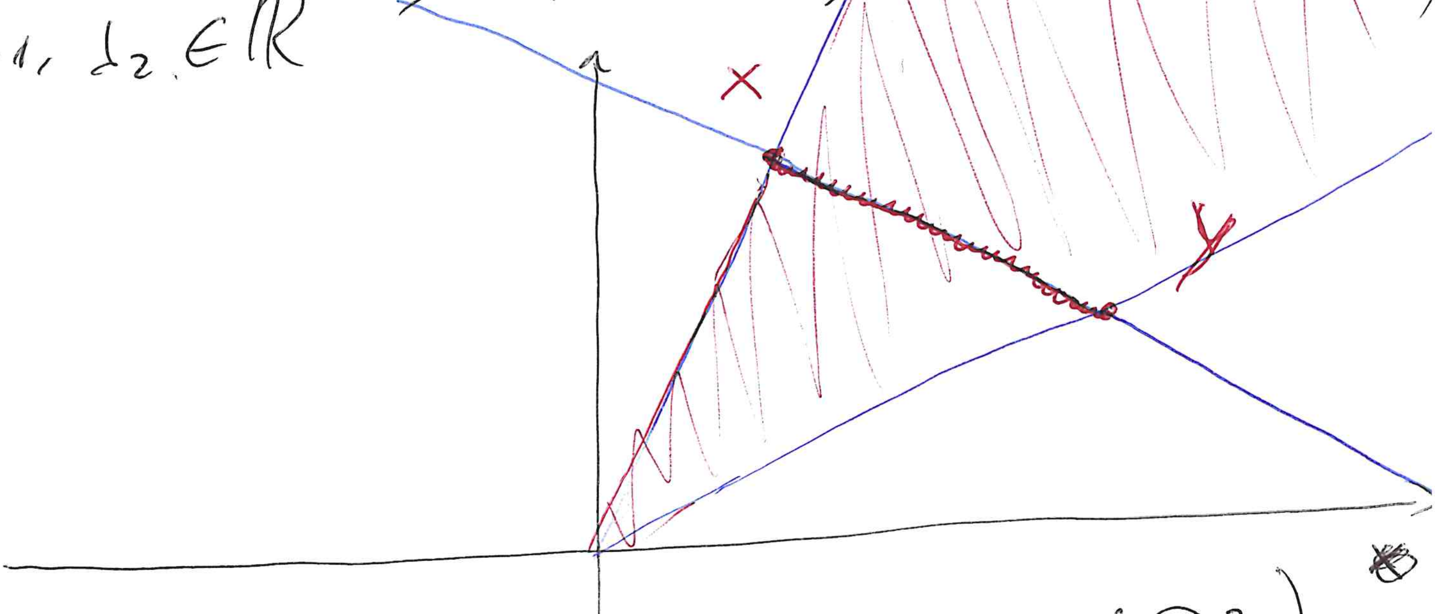
---

1) $\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, k, \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$ COMBINAZIONE CONICA

2) $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$ COMBINAZIONE AFFINE

3) $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1; \ \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$ COMBINAZIONE CONVESSA

$x, y \in \mathbb{R}^2$
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 x + \alpha_2 y$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$



COMB. LINEARE $\Rightarrow$ **PIANO** $(\mathbb{R}^2)$

COMB. CONICA $\Rightarrow$ CONO GENERATO DA x e y
$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$

COMB. AFFINE $\Rightarrow$ RETTA PASSANTE PER X E Y
$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

COMB. CONVESSA $\Rightarrow$ SEGMENTO CHE UNISCE X E Y
$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0; \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ COMB. CONVESSA

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

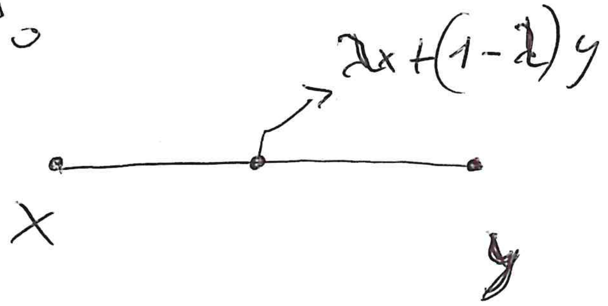
$$\Downarrow$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda \in [0,1] \Rightarrow$ COMB. CONVESSA

$$\underset{\geq 0}{\lambda} x + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} y \qquad \lambda \in [0,1]$$

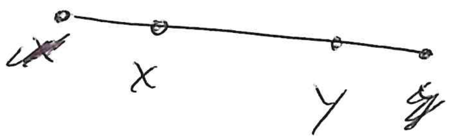


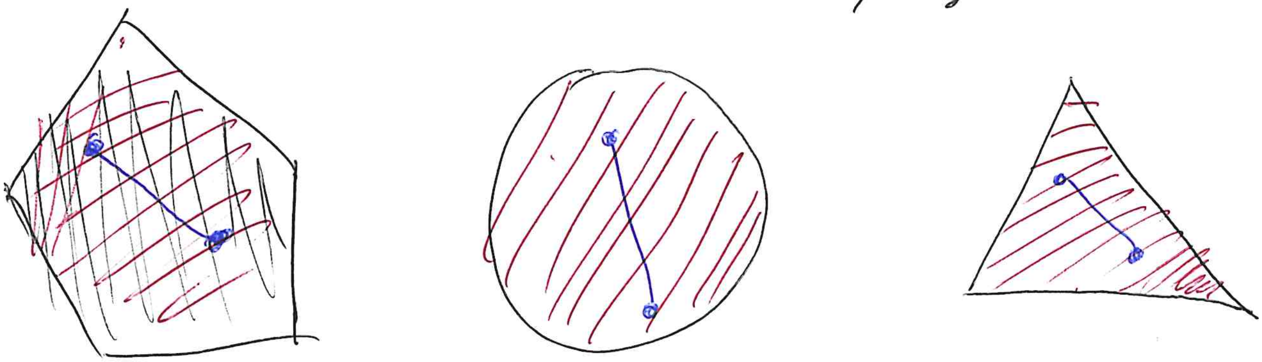
$\lambda \to 0$; $\cancel{\lambda x} + (1-\lambda) y \longrightarrow y$

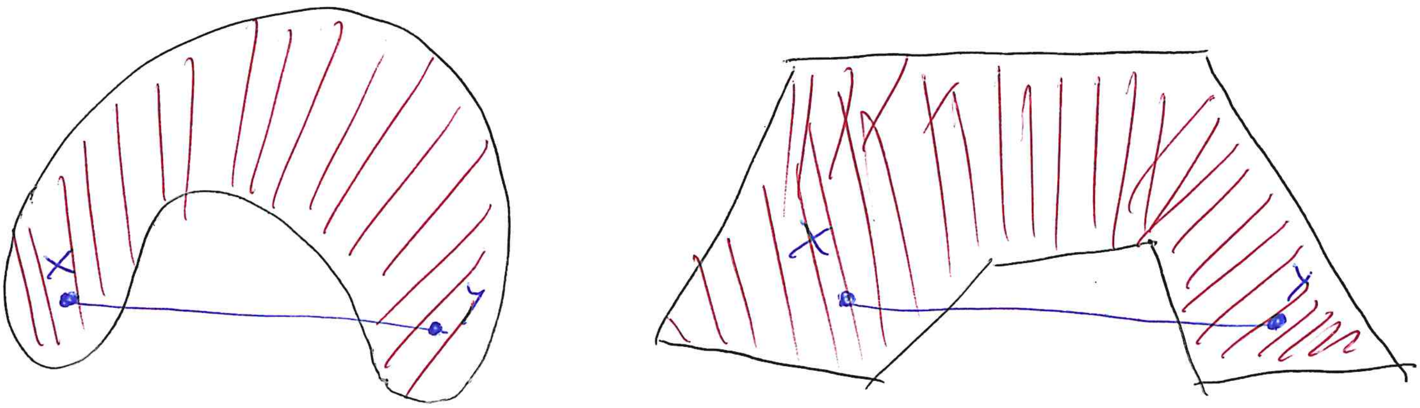
$\lambda \to 1$; $\lambda x + (1-\lambda) y \longrightarrow x$

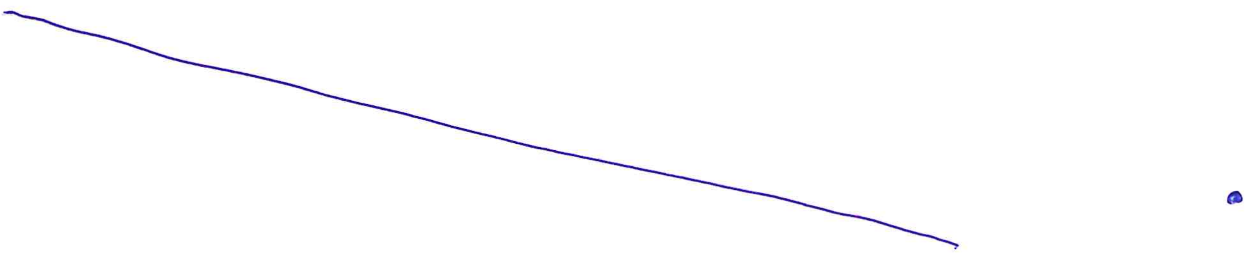
Insieme convesso

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme convesso se $\forall\, x, y \in X$ il segmento che unisce x e y è tutto contenuto in X.









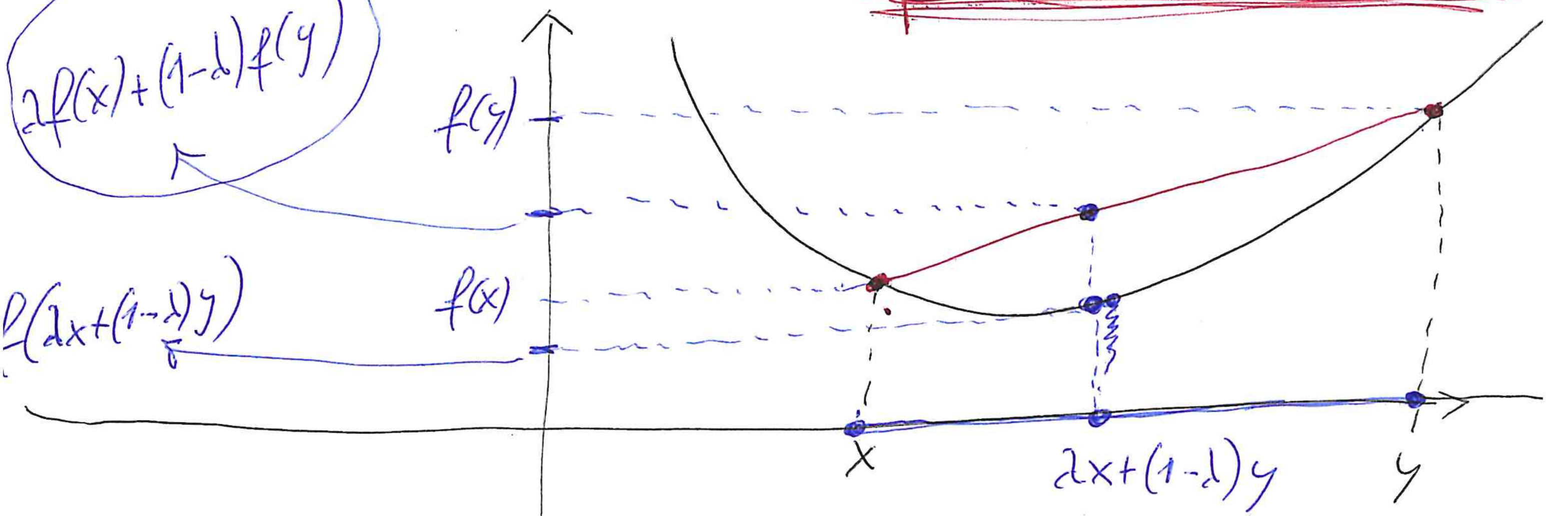
Funzione convesse

$f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}^n$

X insieme convesso

$f(x)$ è una funzione convessa in X se $\forall x, y \in X$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha

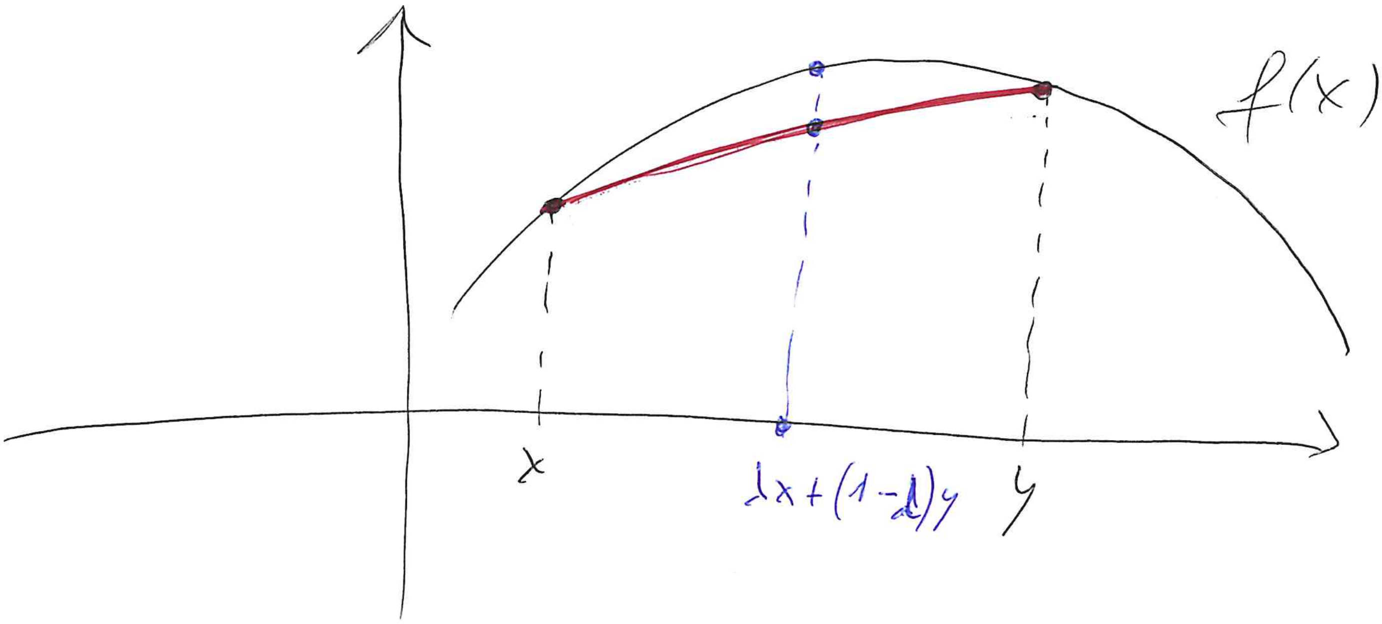
$$\boxed{\underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)} \geq \underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda) y)}}$$



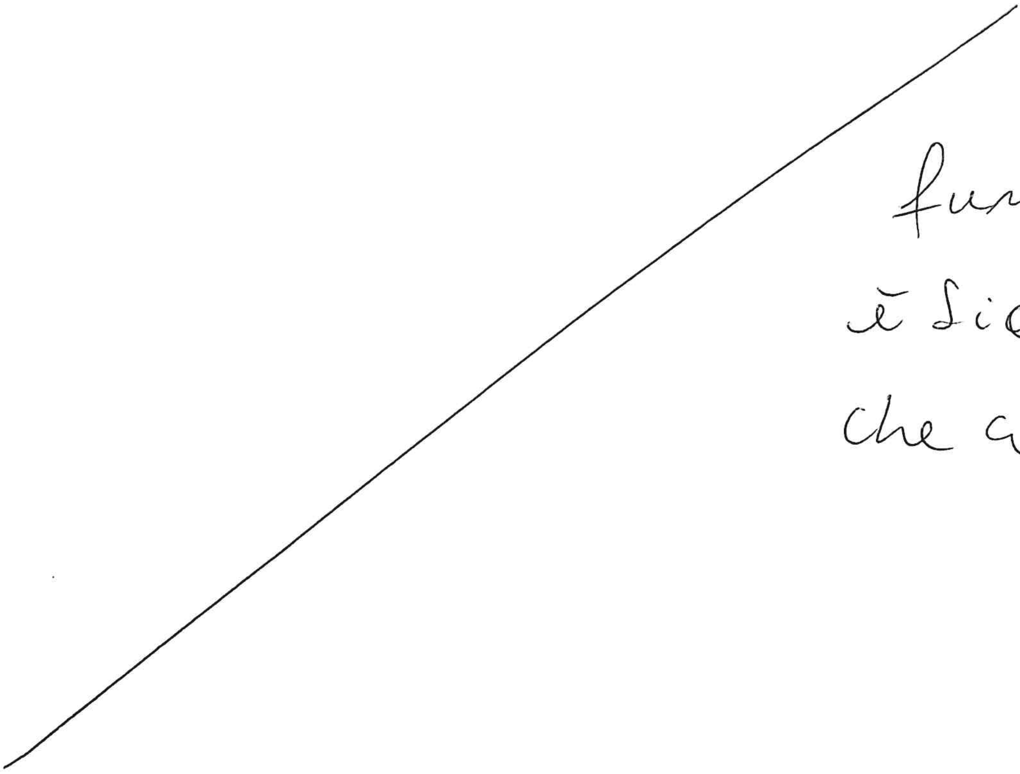
Se $f(X)$ è convessa $\Rightarrow -f(x)$ è concava

$f(x)$ è una funzione concava in X se $\forall x, y \in X$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$



se $f(x)$ è concava $\Rightarrow -f(x)$ è convessa



funzione lineare
è sia convessa
che concava

$f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)$ convessa continuamente differenziabile in $\mathbb{R}^n$ $\Longrightarrow (\Longleftarrow)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

Vero anche il viceversa

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$$

DIM Hp $f(x)$ è convessa e cont. diff.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$

$\varepsilon = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 1 - \varepsilon$

$$(1-\varepsilon) f(x) + \varepsilon f(y) \geq f(\underbrace{(1-\varepsilon)x + \varepsilon y}) = *$$

$$(1-\varepsilon)x + \varepsilon y = x + \varepsilon(y - x) = x + \alpha d$$

$\alpha \to \varepsilon$, $\quad d \to (y - x)$

$$f(x + \varepsilon(y-x)) = f(x) + \varepsilon \nabla f^T(x)(y - x) + \beta_1(\varepsilon, x, y)$$

$$\underline{(1-\varepsilon) f(x) + \varepsilon f(y)} \geq f(x) + \varepsilon \nabla^T f(x)(y - x) + \beta_1(\varepsilon, x,$$

$$\cancel{f(x)} + \cancel{\varepsilon}(f(y) - f(x)) \geq \cancel{f(x)} + \cancel{\varepsilon} \nabla^T f(x)(y - x) + \frac{\beta_1(\varepsilon, x,}{\varepsilon}$$

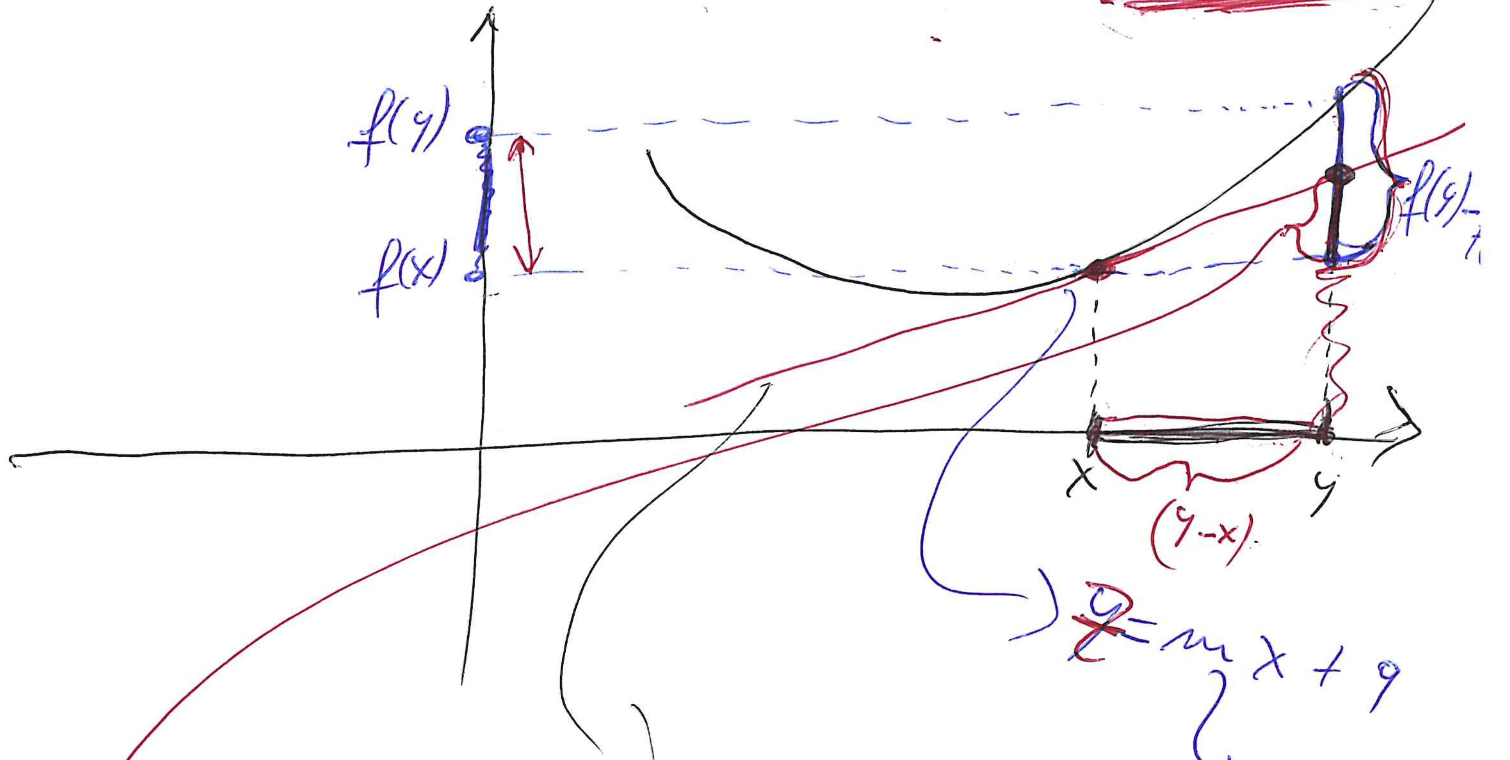
$$\boxed{f(y) - f(x) \geq \nabla f^T(x)(y - x)} + \cancel{\frac{\beta_1(x, y, \varepsilon)}{\varepsilon}}$$

$\lim_{\varepsilon \to 0}$ $\quad\quad \lim_{\varepsilon \to 0}$

$\square$

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)$ convessa e diff.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x)$$



$y = f'(x)x = f'(x)(y-x)$

$f'(x)(y-x)$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A si dice semidefinita positiva se $\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^T A x \geq 0$

A " " definita positiva " " " $\Rightarrow x^T A x > 0$

A è semidefinita negativa se $-A$ è semidefinita positiva

A è definita negativa se $-A$ è definita positiva

<u>Teorema di Sylvester</u> $\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica.

A è definita (semidefinita) positiva se i determinanti dei minori principali di A sono positivi (non negativi)

Minori principali di A:

tutte le matrici quadrate composte dalle prime i righe ed i colonne per $i = 1, \dots, n$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i=1 & i=2 & \quad i=n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Se A è simmetrica!

$a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 > 0$; $\det(A) = 3 - 1 = 2 > 0$

$\Rightarrow A$ ē def. positive

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i=1 & i=2 & i=3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$2 > 0$; $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$

$\det(A) = 2 \times 2 + 1 \times (-1) - 1 \times 2 =$

$= 1 > 0 \Rightarrow$ A ē def. positive

$$\min f(x)$$
$$x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Hp $f(x)$ 2 volte continuamente differenziabile

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \text{ sono continue}$$

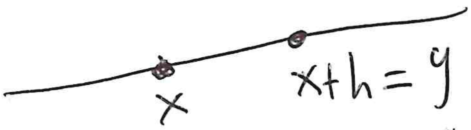
$\Rightarrow \nabla^2 f(x)$ è definita

Se $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva in un punto $x \in X$

$\Rightarrow \exists$ un intorno di x in $f(x)$ è convesse.

DIM.

~~$x \in \mathbb{R}^n$~~ Hp. $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva in $x \in \mathbb{R}^n$



$$x+h=y \Rightarrow y = x + \overbrace{(y-x)}^{h}$$

$$f(y) = f(x+\underbrace{(y-x)}_{h}) = f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \overbrace{\frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(x)(y-x) + \beta_2(x,y)}^{\geq 0}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\beta_2(x,y)}{\|h\|^2} = 0$$

$$h \to 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(x)(y-x) + \beta_2(x,y) \geq 0$$

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y-x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ è convessa in un intorno di x (suff. piccolo)

$\square$

Funzioni Quadratiche

$f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

$x \in \mathbb{R}^n$
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$b \in \mathbb{R}^n$
$c \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(x) = Ax + b$$

$$\nabla^2 f(x) = A \quad \text{è costante}$$

$\Rightarrow$ Se A è def. positiva $\Rightarrow f(x)$ è convessa in tutto $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = x_2^2 - 3x_1x_2 + 3x_1^2 - x_1 + x_2$$

$f(x): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 + 6x_1 - 1 \\ 2x_2 - 3x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad i,j = 1,2$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \boxed{6} & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

$6 > 0$

$\det(\nabla^2 f(x)) = 12 - 9 > 0$

$\Rightarrow$ def. positiva

$\Downarrow$

$f(x)$ è convessa

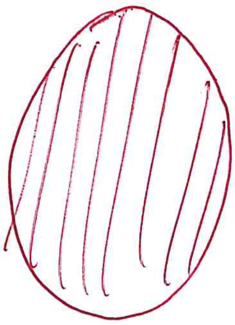
$$\min_{x \in X} f(x) \qquad f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Esistenza di punti di minimo per $f(X)$

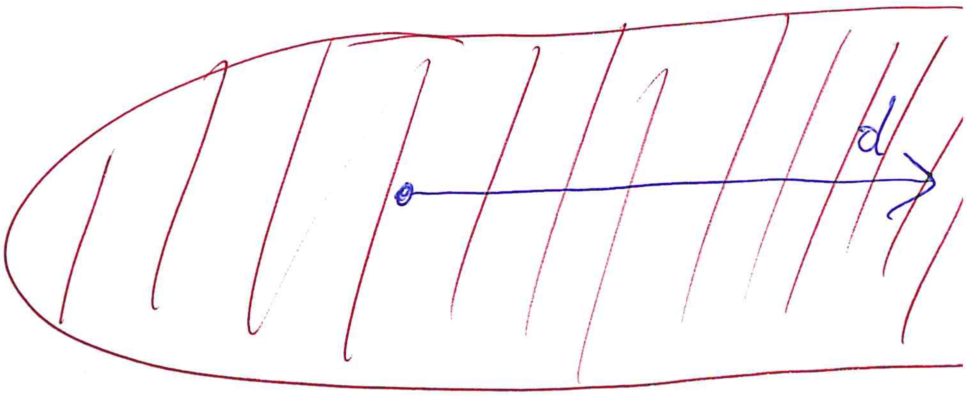
Se $f(x)$ è continua su un insieme X chiuso e limitato $\Rightarrow$ $f(x)$ ammette un punto di minimo globale.

Insieme chiuso: un insieme che contiene le frontiere

Insieme limitato: se $\nexists\, d \in \mathbb{R} : x + Md \in X \quad \forall M \in \mathbb{R}^+$

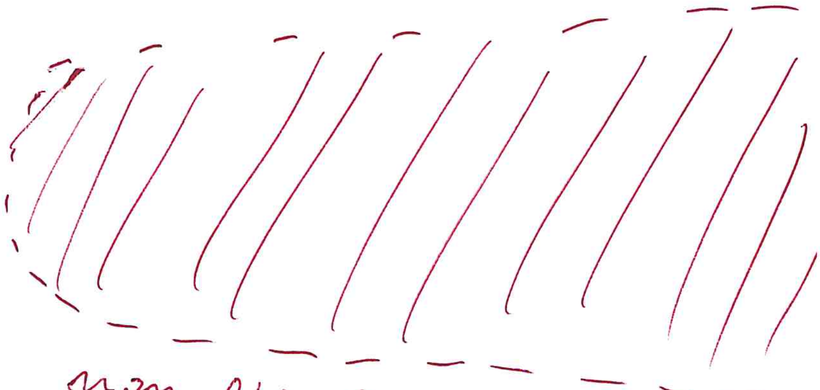


Chiuso e limitato

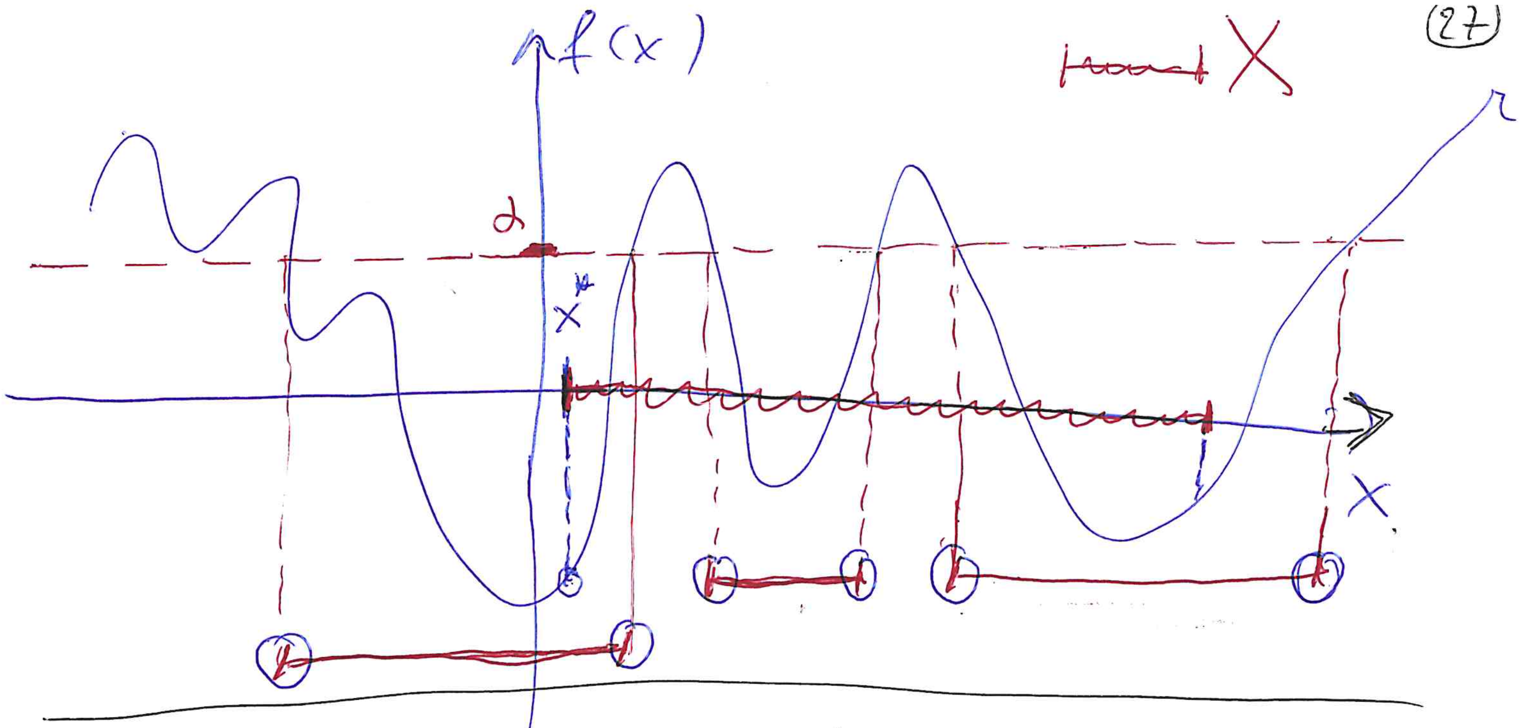


Chiuso e non limitato

non chiuso e limitato



non chiuso e



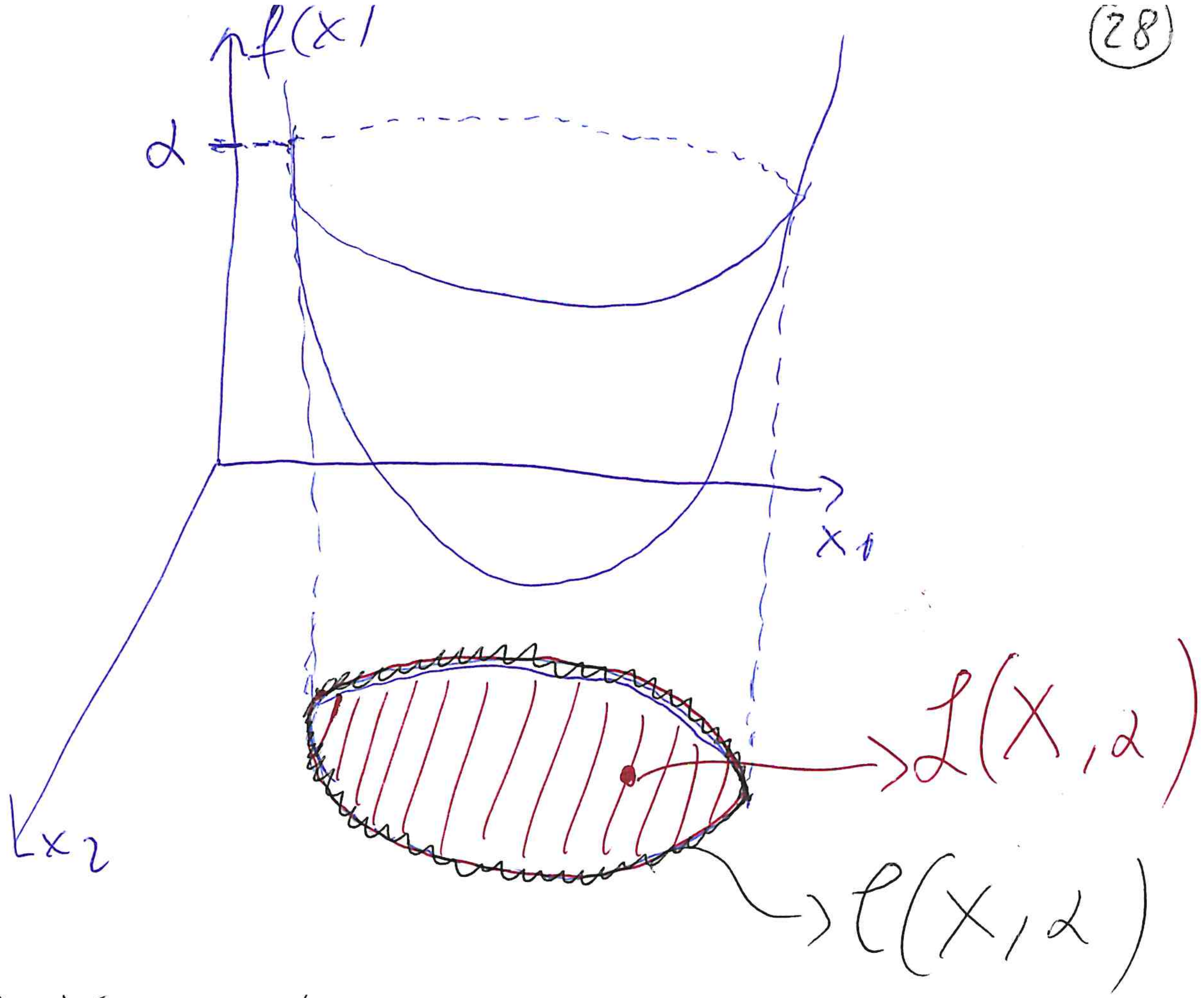
$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^n$

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'Insieme di livello di $f(x)$ in X rispetto ad α

$$\mathcal{L}(X, \alpha) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

La superficie di livello di $f(x)$ in X rispetto ad α

$$\ell(X, \alpha) = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$



Se $f(x)$ è continua in un insieme X e almeno uno dei suoi insiemi di livello è chiuso e limitato $\Rightarrow$ $f(x)$ ammette un punto di minimo in X.

Angolo tra due vettori

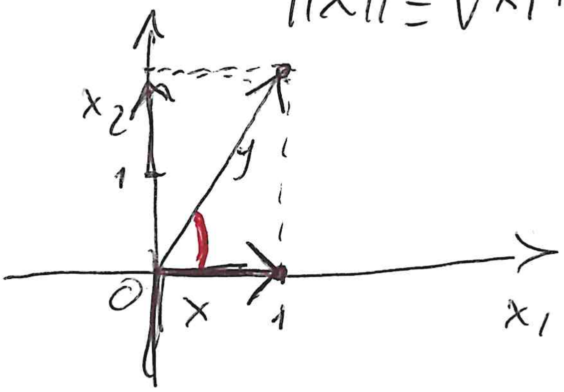
$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\cos\vartheta = \frac{x^T y}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \simeq 0{,}86 \qquad y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \simeq 1{,}7$$

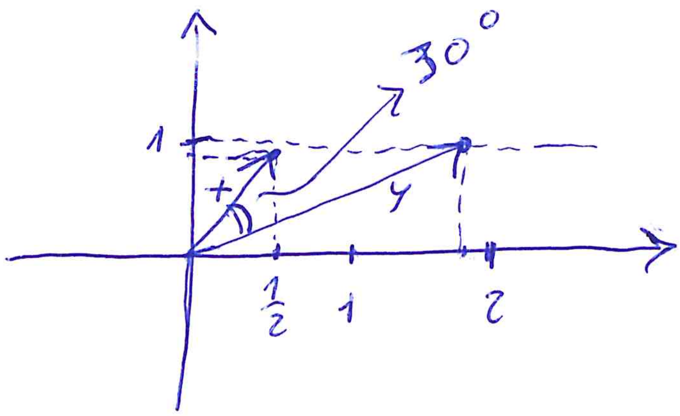
$$x^T y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\cos\vartheta = \frac{x^T y}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$\|x\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

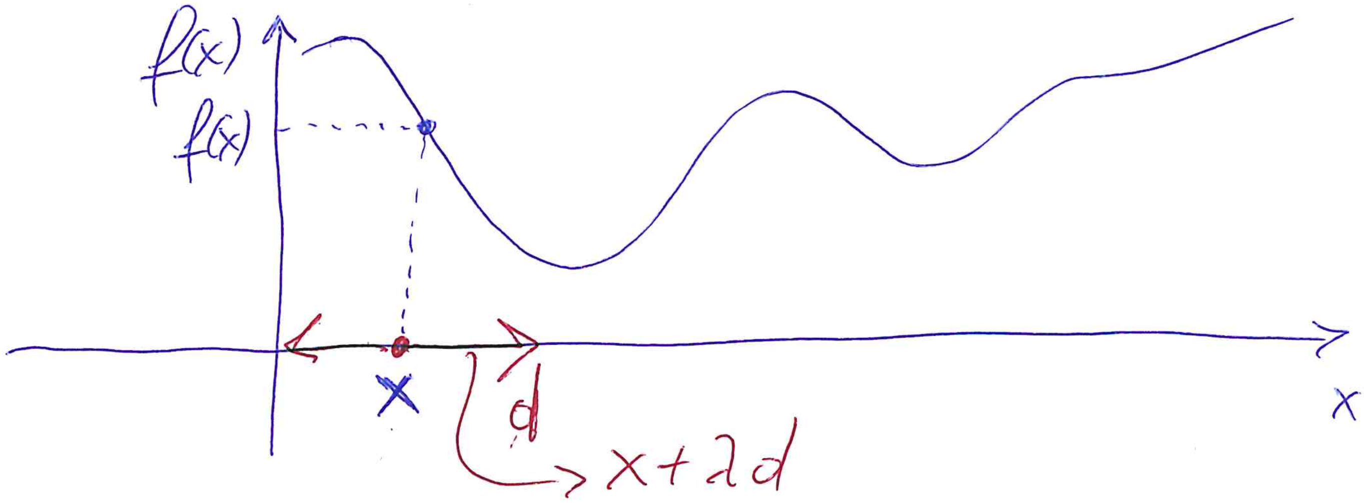
$$\|y\| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$



DIREZIONE DI DISCESA PER LA $f(x)$ in $x \in X$

$$\min_{x \in X} f(x) \qquad f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \subseteq \mathbb{R}^n$$



$d \in \mathbb{R}^n$ è una direzione di discesa di $f(x)$ in $x \in X$ se $\exists\ \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$f(x+\lambda d) < f(x) \quad \forall\, 0 < \lambda < \bar{\lambda}$$

Se $f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con gradiente continuo in $\mathbb{R}^n$. Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e una direzione $d \in \mathbb{R}^n$, d è una direzione di discesa se la derivata direzionale di $f(x)$ in x calcolata rispetto alla direzione d è negativa.

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \boxed{\frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda > 0}}_{<0} = \nabla f(x)^T \cdot d < 0$$

$\Rightarrow \exists\ \lambda$ suff. piccolo tale che $f(x+\lambda d) - f(x) < 0$

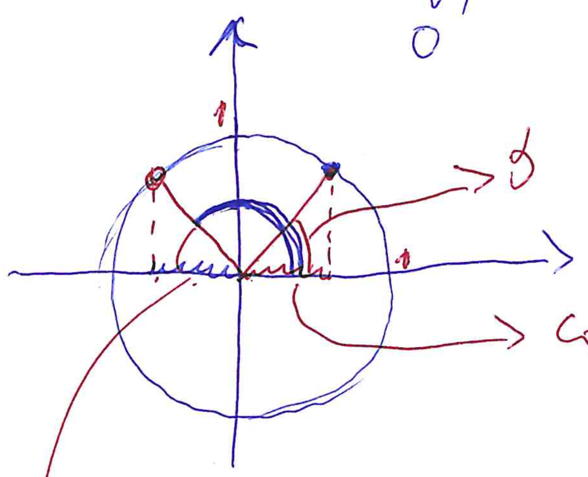
$\Rightarrow f(x+\lambda d) < f(x)$

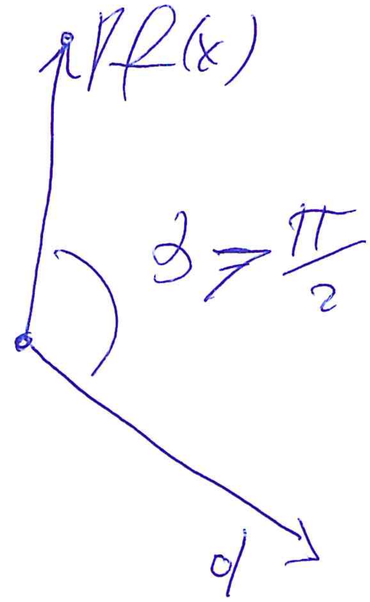
d è direzione di discesa per $f(x)$ in $x \in X$

Se $\nabla f(x)^T \cdot d < 0$

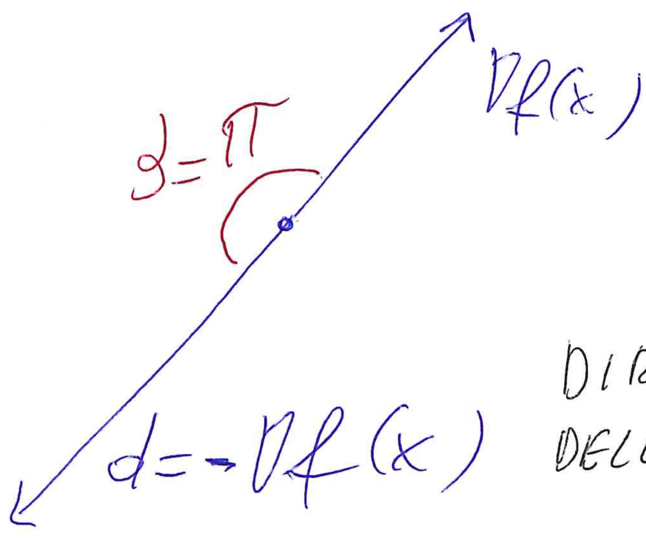
$$\cos\vartheta = \frac{\nabla f(x)^T \cdot d}{\|\nabla f(x)\| \cdot \|d\|} \Rightarrow$$

$$\nabla f(x)^T d = \underbrace{\|\nabla f(x)\|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\|d\|}_{\geq 0} \underbrace{\cos\vartheta}_{< 0} < 0$$





$\cos\vartheta < 0 \Rightarrow \vartheta > \frac{\pi}{2}$



$(\nabla f(x) \neq 0)$

DIREZIONE DELL'ANTIGRADIENTE

$d = -\nabla f(x)$ è una direzione di discesa per $f(x)$ in $x \in X$

II

DIREZIONE DI SALITA DI $f(x)$ IN $x \in X$

$d \in \mathbb{R}^n$ è direzione di salita per $f(x)$ in $x \in X$ se $\exists\, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x+\lambda d) > f(x)$$

$$0 < \lambda < \bar{\lambda}$$

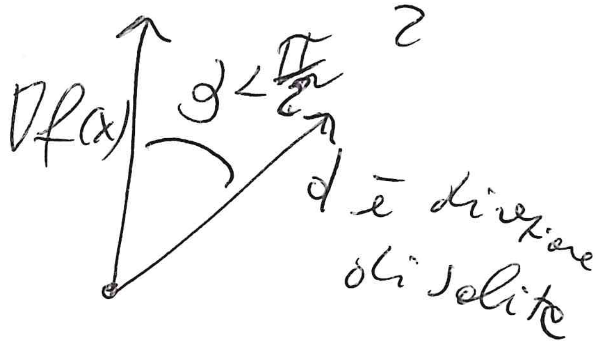
d è una direzione di salita se

$$\nabla f(x)^T \cdot d > 0$$

$$\nabla f(x)^T d = \underbrace{\|\nabla f(x)\|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\|d\|}_{\geq 0} \underbrace{\cos\vartheta}_{>0 \text{ se } \vartheta < \frac{\pi}{2}} > 0$$

$d = \nabla f(x) \Rightarrow \vartheta = 0$

$\Rightarrow$ $\nabla f(x)$ è una direzione di salita!



$d \in \mathbb{R}^n$

$\nabla f(x)^T d < 0$ $\left(\pi \geq \vartheta > \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ d è direzione di discesa

$\nabla f(x)^T \cdot d > 0$ $\left(\frac{\pi}{2} > \vartheta \geq 0\right) \Rightarrow$ d è direzione di salita

$\nabla f(x)^T \cdot d = 0$ $\Rightarrow$ d non è né dir. di discesa né dir. di salita (la funzione non varia lungo d)

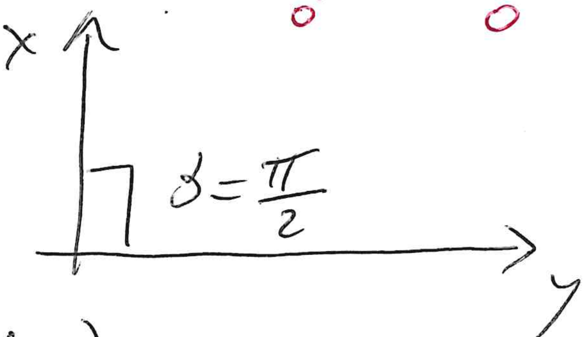
$\nabla f(x), d \neq 0$ $\quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$

$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x, y \neq 0$

x e y si dicono ortogonali se

$$x^T y = 0 \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{x^T y}{\underbrace{\|x\|}_{>0} \cdot \underbrace{\|y\|}_{>0}} = 0$$

$\Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$



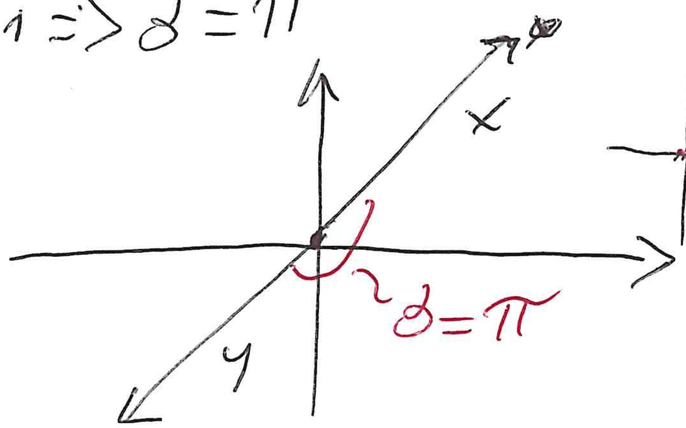
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \underline{\underline{x^T y = 2 - 1 - 1 = 0}}$$

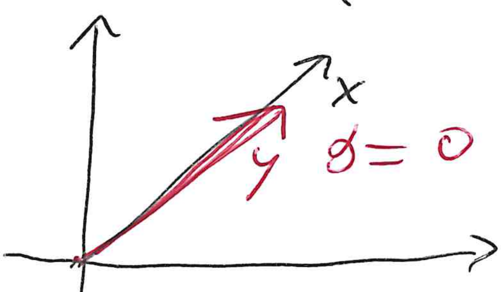
$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x, y \neq 0$

x e y si dicono paralleli se $y = \alpha \cdot x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos\vartheta = \frac{x^T y}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\alpha\, x^T x}{\|x\| \cdot |\alpha| \cdot \|x\|} = \frac{\alpha \cancel{\|x\|^2}}{|\alpha| \cancel{\|x\|^2}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 0 \\ -1 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\cos\vartheta = \begin{cases} 1 \Rightarrow \vartheta = 0 \\ -1 \Rightarrow \vartheta = \pi \end{cases}$$





Esempio

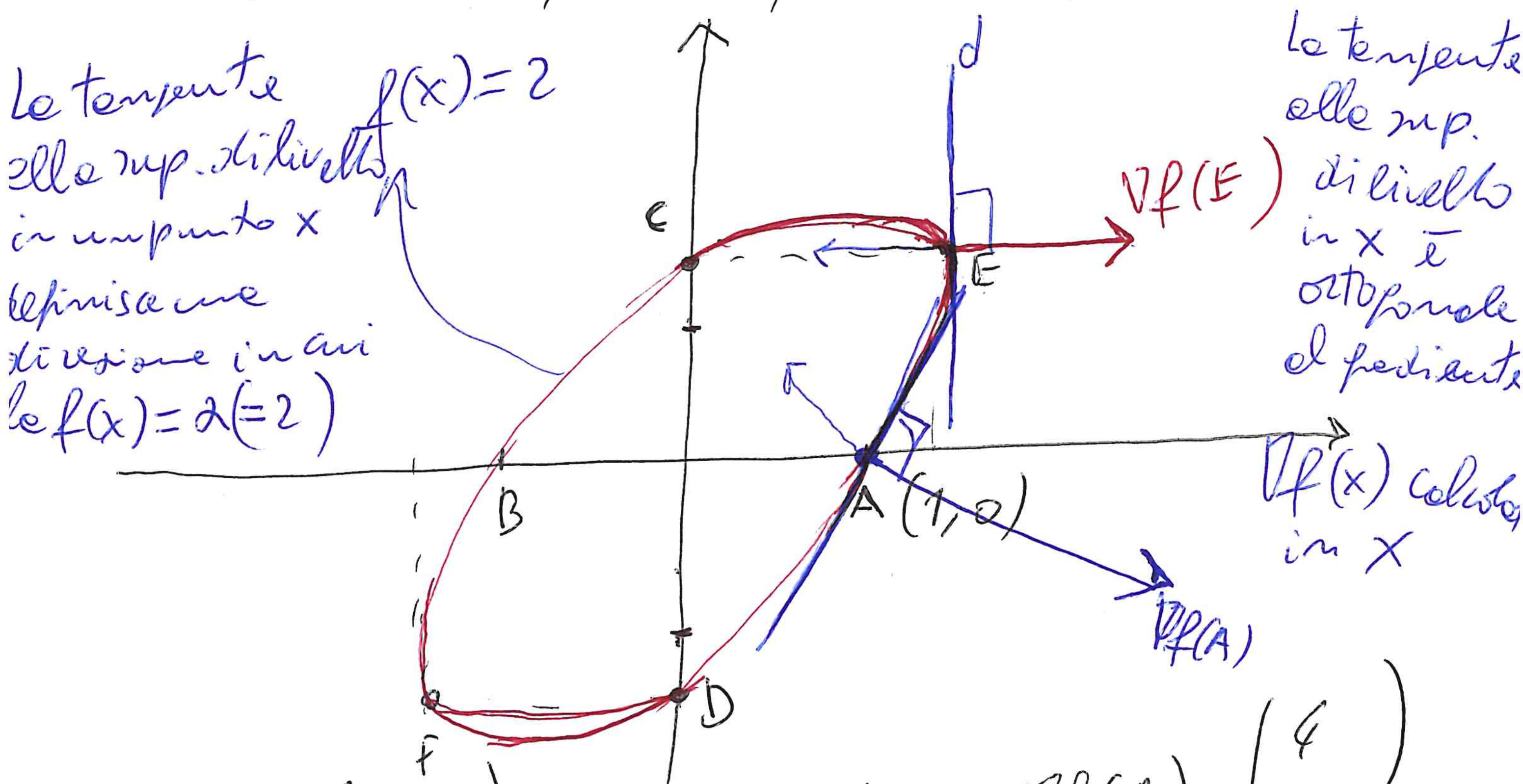
$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

~~Curve~~ Superficie di livello con $\alpha = 2$

$$\mathcal{C}(f(x), \alpha) \doteq \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



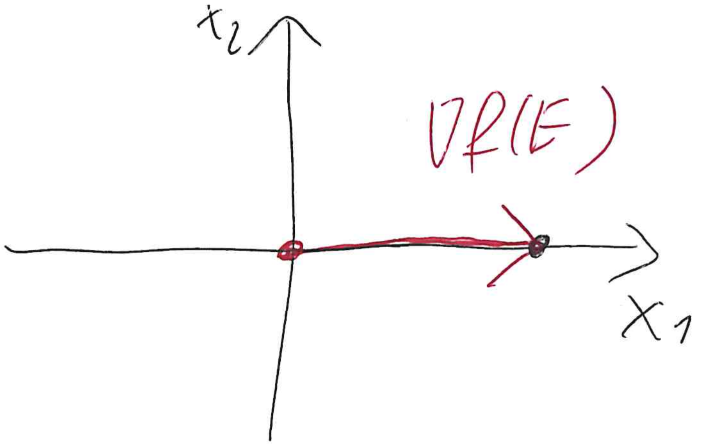
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ \\ 2x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

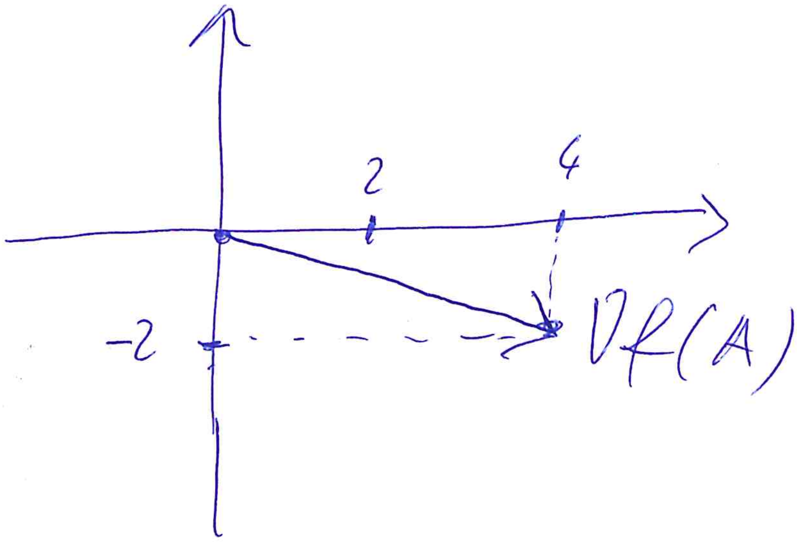
$$\nabla f(C) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(E) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(E) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\nabla f(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$



OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA

$X \equiv \mathbb{R}^n$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Condizioni di ottimalità del I° ordine

Sia $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione con gradiente continuo in $x^* \in \mathbb{R}^n$. Condizione necessaria affinché x^* sia un punto di minimo locale è

$$\nabla f(x^*) = 0$$

x^* è detto punto stazionario

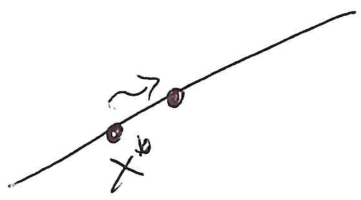
DIM.

Hp. x^* è un minimo locale

Th. $\nabla f(x^*) = 0$

Per assurdo supponiamo che $\nabla f(x^*) \neq 0$

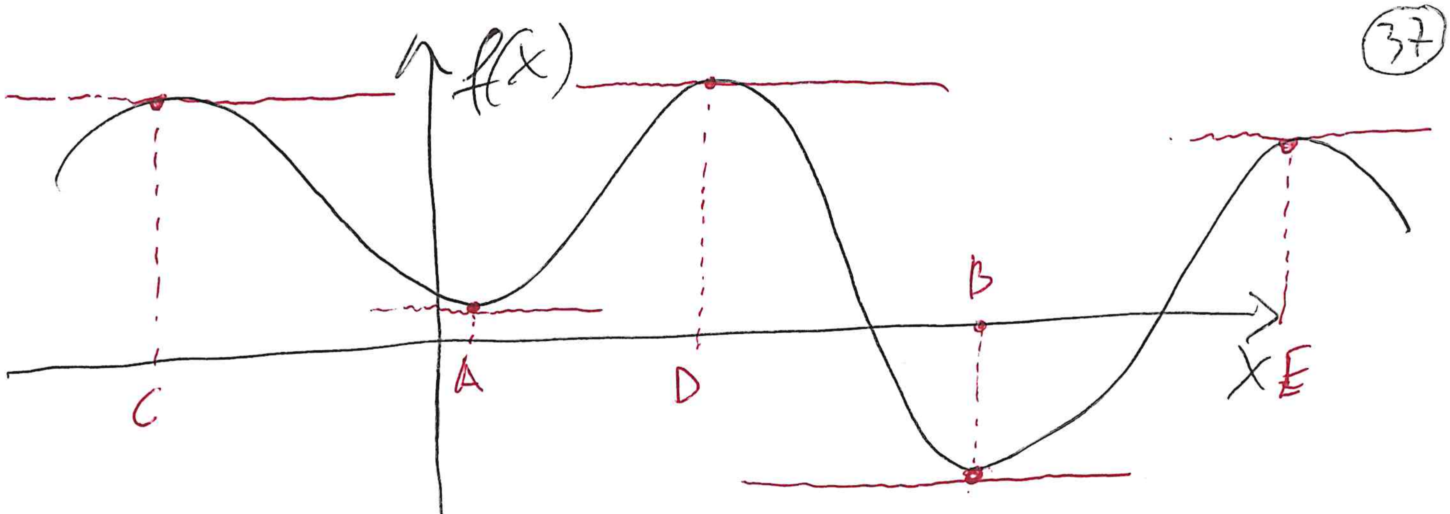
ma allora $d = -\nabla f(x^*) \neq 0$ è una direzione di discesa $\Rightarrow$ x^* non è un punto di minimo (assurdo) □



---

x^* è un minimo locale se $\exists\, I(x^*, \varepsilon)$ tale che

$$f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in I(x^*, \varepsilon)$$



$\nabla f(x) \rightsquigarrow f'(x)$

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Condizioni di ottimalità del II ordine

Sia $f(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con $\nabla^2 f(x)$ continua in un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$.
Condizioni necessarie affinché x^* sia un minimo locale sono:

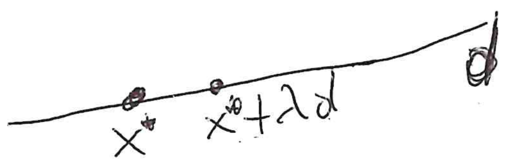
1) $\nabla f(x^*) = 0$
2) $\nabla^2 f(x^*)$ semidefinita positiva

DIM. Hp x^* un minimo locale

Th. $\nabla f(x^*) = 0$; $\nabla^2 f(x^*)$ semidef. pos.

$d \in \mathbb{R}^n$
$\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{I}^\circ \text{ ordine} \Rightarrow \nabla f(x^*) = 0}$



$$f(x^* + \lambda d) = f(x^*) + \cancel{\lambda \nabla f(x^*)^T d} + \frac{1}{2}\lambda^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + \beta_2(x^*, \lambda, d)$$

$$f(x^*+\alpha d)-f(x^*)=\frac{1}{2}\alpha^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + \beta_2(x^*,\alpha,d)$$ (38)

≥ 0

Per α suff. piccolo per Ipotesi

$$f(x^*+\alpha d)-f(x^*)\geq 0$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta_2(x^*,\alpha,d)}{\alpha^2}=0$$

≥ 0

$$\frac{f(x^*+\alpha d)-f(x^*)}{\alpha^2}=\frac{1}{2}d^T\nabla^2 f(x^*)d+\cancel{\frac{\beta_2(x^*,\alpha,d)}{\alpha^2}}$$

≥ 0

$\lim_{\alpha\to 0}$ $\lim_{\alpha\to 0}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}d^T\nabla^2 f(x^*)d \geq 0 \quad \forall d\in\mathbb{R}^n$$

$\Longrightarrow \nabla^2 f(x^*)$ è semidefinita positiva

$\square$

CONDIZIONI SUFFICIENTI DI MINIMO LOCALE

Sia $f(x)$ una funzione ($f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) con ~~una~~ $\nabla^2 f(x)$ continua in un intorno di un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Allora x^* è un minimo locale stretto se:

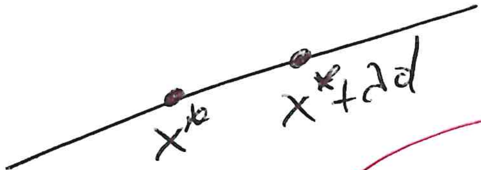
1) $\nabla f(x^*) = 0$

2) $\nabla^2 f(x^*)$ definita positiva.

$$\begin{cases} f(x^*) < f(x) \\ x \in I(x^*, \varepsilon) \end{cases}$$

DIM. Hp $\boxed{\nabla f(x^*) = 0}$; $\nabla^2 f(x^*)$ def. positiva

Th x^* è un minimo locale stretto



$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \alpha \underbrace{\cancel{\nabla f(x^*)^T d}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\alpha^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + \beta_2(x^*, \alpha, d)}_{>0}$$

2) $\Rightarrow$ $d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0$

Per α suff. piccolo $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\alpha^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + \beta_2(x^*, \alpha, d)\right)}_{>0}$

$\Rightarrow f(x^* + \alpha d) > f(x^*)$ per α suff. piccolo

$\Rightarrow \exists$ un intorno di x^* (suff. piccolo) tale che $f(x^* + \alpha d) > f(x^*) \Rightarrow x^*$ è un minimo locale stretto $\square$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

OTTIMIZZAZIONE ~~...~~ NON VINCOLATA

Condizioni necessarie del I° ordine di massimo locale:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

(se $\nabla f(x^*) \neq 0 \Rightarrow d = \nabla f(x^*)$ è dir. di salita)

Condizioni necessarie del II ordine di max locale

1) $\nabla f(x^*)$
2) $\nabla^2 f(x^*)$ semidefinita negativa ($-\nabla^2 f(x^*)$ semidefinita positiva)

Condizioni sufficienti di massimo locale stretto

1) $\nabla f(x^*) = 0$
2) $\nabla^2 f(x^*)$ definita negativa ($-\nabla^2 f(x^*)$ def. positiva)

---

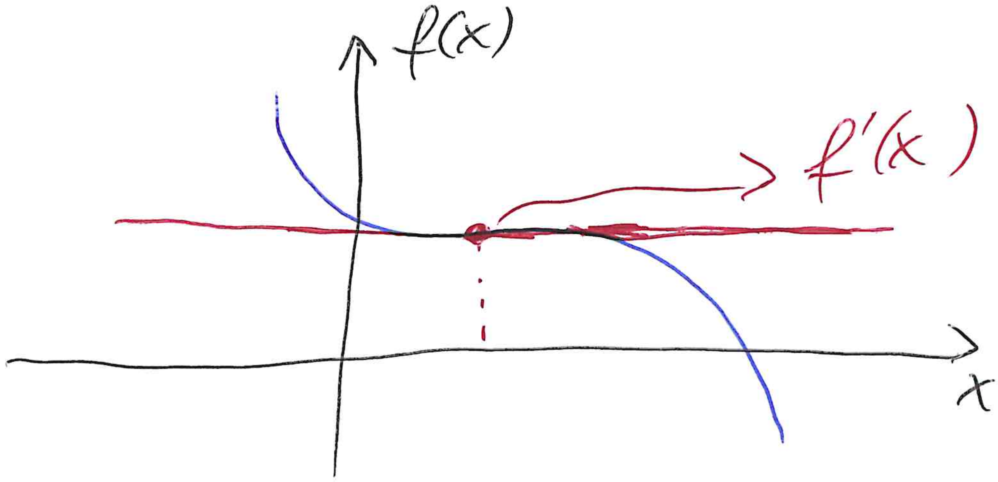
x^*

$\nabla f(x^*) = 0$

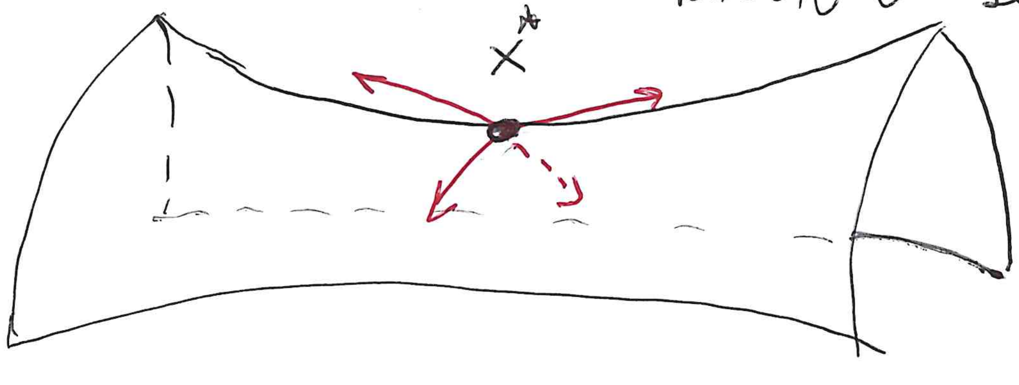
$\nabla^2 f(x^*)$ non è

né semidef./def. positi(va)

né semidef./def. negativa



Punto di sella



$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2^2 \qquad f(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2^2 \\ 2x_2 + 2x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2+2x_1 \end{pmatrix}$$

condideti e minimo locale
$$\begin{cases} 1)\ \nabla f(x^*) = 0 \\ 2)\ \nabla^2 f(x^*) \text{ semidef. pos.} \end{cases}$$

$$1)\ \nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\alpha)\ 2x_1 + x_2^2 = 0 \\ (\beta)\ 2x_2 + 2x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_2(2+2x_1) = 0 \\ \Rightarrow x_2 = 0,\ x_1 = -1 \end{cases}$$

~~$x_2 = 0$~~ $(\alpha)\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

~~x_1~~ $(\alpha)\ x_1 = -1 \Rightarrow x_2^2 = 2 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 2^{>0} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 4 > 0 \Rightarrow$$

$\nabla^2 f(A)$ è def. positiva $\Rightarrow$ A è un minimo locale stretto (condizioni sufficienti!!)

$$\nabla^2 f(B) = \begin{pmatrix} +2 & +2\sqrt{2} \\ +2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \det(\nabla^2 f(B)) = -8 < 0$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(B)$ non è semidef. o def. positiva

$$-\nabla^2 f(B) = \begin{pmatrix} -2^{<0} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$ non è semidef. o def. positiva

$\Rightarrow \nabla^2 f(B)$ non è semidef. o def. negativa.

$\Rightarrow$ B è un punto di sella.

$$\nabla^2 f(C) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ non è def. o semidef. positiva

$$-\nabla^2 f(C) = \begin{pmatrix} -2^{<0} & +2\sqrt{2} \\ +2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ non è def. o semidef. positiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla^2 f(C)$ non def. o semidef. negativa

$\Rightarrow$ C è un punto di sella.

$$\cancel{f(x) = 4 + x_2^2 - 2x_2^2}$$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2^2$$

$$d = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(d) = 4 + x_2^2 - 2x_2^2 = 4 - x_2^2$$

$$\lim_{x_2 \to \pm\infty} 4 - x_2^2 = -\infty$$

$f(x)$ non ha minimi globali