

$$\min -x_1 - x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{matrix} \quad (179)$$

$$b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la base B

$$B = (A_3 \ A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = (A_1 \ A_2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0 \\ x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F \\ c^T x = c_B^T B^{-1}b + (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) x_F \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{problema in} \\ \text{forma canonica} \\ \text{rispetto la base } B \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2$$

$$c^T x = -x_1 - x_2 = \underbrace{c_B^T B^{-1}b}_{=0} + \underbrace{\bar{c}_1}_{-1} x_1 + \underbrace{\bar{c}_2}_{-1} x_2$$

costi ridotti
delle variabili
fuori base

$$\bar{c}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow \text{SBA non \u00e9 ottimale}$$

$$\hookrightarrow c^T x = 0 \text{ f. ob. in SBA}$$

$$\begin{cases} C^T x = -x_1 - x_2 \\ \rightarrow x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \\ \rightarrow x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

180

$\Rightarrow$ Se aumentiamo una variabile fuori base con costo ridotto negativo la f. ob. decrece -

Aumentiamo x_1 e manteniamo $x_2 = 0$

Messimo aumento di x_1 :

$$\begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \geq 0 \Rightarrow 24 - 6x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \geq 0 \Rightarrow 6 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{il max aumento di } x_1 \text{ \u00e8 } 2$$

$$\text{quando } x_1 = 2 \ (x_2 = 0) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 12 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Soluzione ammissibile con valore della f. ob. $= -2 < 0$ $\rightarrow$ valore della SBA di partenza

(A₁)

x_1 \u00e8 entrata in base con valore 2

x_4 \u00e8 uscita dalla base (con valore nullo)

(A₄)

OPERAZIONE
DI PIVOT $\leftarrow$

Nuove base

$$B = (A_1, A_3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = (A_2, A_4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

181

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = B^{-1}b \geq 0!$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \longrightarrow x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \longrightarrow x_3 = 24 - 6\left(2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) - 4x_2 = \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = 12 - 8x_2 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} C^T x &= -x_1 - x_2 = -\left(2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) - x_2 = \\ &= -2 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C^T x = -2 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 = \underbrace{\bar{c}_3 B^{-1}b}_{\text{il valore delle f.d. nelle nuove sol. base}} + \underbrace{\bar{c}_2 x_2 + \bar{c}_4 x_4}_{\text{costi relativi variabili fuori base}} \end{cases}$$

$x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$ (1)

$x_3 = 12 - 8x_2 + 2x_4$ (2)

→ Problema in forma canonica rispetto alla nuova base $B = (A_1, A_3)$

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= -\frac{5}{3} < 0!! \Rightarrow \text{SBA non \u00e8 ottimale} \\ \bar{c}_4 &= \frac{1}{3} \geq 0 \end{aligned}$$

aumento x_2 e lascio $x_4 = 0$

(182)

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 = 2 + \frac{2}{3}x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq -3 \\ x_3 = 12 - 8x_2 + 2x_4 = 12 - 8x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sempre vero

$$x_2 \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ max valore $x_2 = \frac{3}{2}$ ($x_4 = 0$)

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | esce dalla base (A_3 esce e B)
entra in base (entra in base A_2)

matrice $B = (A_1 \ A_2) \quad F = (A_3 \ A_4)$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema in forma canonica rispetto a $B = (A_1 \ A_2)$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4$$

$$\begin{cases} c^T x = -\frac{9}{2} + \frac{5}{24}x_3 - \frac{1}{12}x_4 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{12}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \quad (1) \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \quad (2) \end{cases}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\bar{c}_3 > 0$ ok
 $\bar{c}_4 = -\frac{1}{12} < 0$!!
SBA
non ottimale

aumento x_4 ($x_3 = 0$)

$$x_1 = 3 - \frac{1}{12}x_3 - \frac{1}{6}x_4 = 3 - \frac{1}{6}x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq 18$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \geq -6$$

Sempre vero

Il max valore di $x_4 = 18$ (entro in base; A_4 entro in base,
 $\Rightarrow x_1 = 0$ (Esce dalla base A_1 esce da B)
 $\Rightarrow x_2 = 6$ (18)

Nuova base: $B = (\cancel{A_1} A_2 A_4)$ $E = (A_1 A_3)$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix} ; x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① $x_4 = 18 - 6x_1 - 2x_3$

② $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}(18 - 6x_1 - 2x_3) = 6 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}x_3$

$$\left[\begin{aligned} C^T x &= -\frac{9}{2} + \frac{5}{24}x_3 - \frac{1}{12}(18 - 6x_1 - 2x_3) = \\ &= -\frac{11}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{9}{24}x_3 \\ &\quad \bar{c}_1 \quad \bar{c}_3 \\ x_2 &= 6 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}x_3 \\ x_4 &= 18 - 6x_1 - 2x_3 \end{aligned} \right] \text{ Problema canonico rispetto alle base } B = (A_2 A_4)$$

$\bar{c}_1 > 0, \bar{c}_3 > 0 \Rightarrow$ SBA è ottimale!

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix} \quad x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T x = (C_B^T \mid C_F^T) \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = C_B^T B^{-1}b = -\frac{11}{2}$$

3.2. IL METODO DEL SIMPLESSO

31

Algoritmo del Simplexso (forma matriciale):

begin

siano $\beta[1], \dots, \beta[m]$ gli indici delle colonne di una base ammissibile iniziale;

$illimitato := false$;

$ottimo := false$;

while ($ottimo=false$) and ($illimitato=false$) do

begin

sia $B := [A_{\beta[1]} \dots A_{\beta[m]}]$ la base ammissibile corrente;

calcola B^{-1} e poni $u^T := c_B^T B^{-1}$;

calcola il costo ridotto $\bar{c}_h := c_h - u^T A_h$ delle variabili x_h fuori base;

if $\bar{c}_h \geq 0 \forall x_h$ fuori base then $ottimo := true$ STOP

else

begin

scegli una variabile fuori base x_h con $\bar{c}_h < 0$;

calcola $\bar{b} := B^{-1}b$ ed $\bar{A}_h := B^{-1}A_h$;

if $\bar{a}_{ih} \leq 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$ then $illimitato := true$

else

begin

calcola $t := \arg \min \{\bar{b}_i / \bar{a}_{ih}, i \in \{1, \dots, m\} : \bar{a}_{ih} > 0\}$;

aggiorna la base corrente ponendo $\beta[t] := h$

end

end

end

end .

nuove base

$$B = (A_{\beta(1)} \quad A_{\beta(2)} \quad \dots \quad A_{\beta(t)} \quad \dots \quad A_{\beta(m)})$$

$$B' = \begin{pmatrix} \text{"} & \text{"} & A_h & \text{"} & \text{"} \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_h = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1h} \\ \bar{a}_{2h} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mh} \end{pmatrix}$$

Figura 3.2: Algoritmo del Simplexso (forma matriciale)

Riprendiamo l'esempio (3.1). Una base ammissibile iniziale può essere facilmente ottenuta scegliendo le colonne associate alle variabili slack x_3 e x_4 .

$$1^a \text{ iterazione: } B = [A_3, A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \\ z = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

I costi ridotti nella funzione obiettivo sono negativi. Scegliamo di far entrare in base la variabile $x_h = x_1$. Imponendo le condizioni di non negatività per le variabili in base si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = 24 - 6x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4 \\ x_4 = 6 - 3x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2 \end{cases} \quad \vartheta = \min\{2, 4\} = 2$$

e quindi la variabile x_1 entra in base ed assume il valore $\vartheta = 2$. In questo modo si azzerà la variabile x_4 in base sulla riga pivot $t = 2$ (quella che ha determinato il valore minimo ϑ), e quindi x_4 esce dalla base. In questo modo la funzione obiettivo diminuisce di $|\bar{c}_h|\vartheta = 2$. Per poter iterare il procedimento dobbiamo aggiornare il sistema in forma canonica, esprimendo le nuove variabili base x_3, x_1 e la funzione obiettivo z in funzione delle nuove variabili fuori base x_2 ed x_4 .

84

Un'industria di mobili deve ricavare da lastre rettangolari di 3 x 4 metri gli elementi indicati in figura. Precisamente, deve soddisfare una domanda di 20 elementi del tipo "L" e 30 del tipo "I" utilizzando il numero minimo di lastre. Formulare il problema come problema di programmazione lineare.

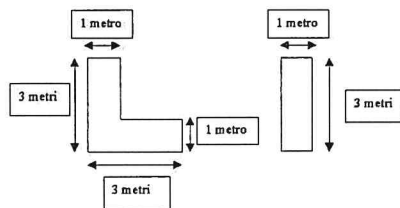


Figura 1: Lastre nell'esercizio 84.

85

Una pasticceria produce due tipi di torta, A e B. Ciascuna torta richiede una certa quantità di latte, zucchero e panna. La panna viene prodotta dalla pasticceria stessa, che può anche venderla direttamente al pubblico. La pasticceria dispone di 25 litri di latte e 15 kg di

	latte (litri)	zucchero (kg)	panna (kg)	prezzo vendita unitario (euro)
torta A	0.5	0.3	0.2	10
torta B	0.6	0.2	0.4	15
panna (1 kg)	0.7	0.3	-	3

zucchero. Il problema è quello di programmare la produzione (di torte e panna) al fine di massimizzare il profitto. Formulare come PL questo problema.

86

Un'industria chimica produce due tipi di plastiche (A e B), secondo tre diversi processi chimici (1, 2 e 3). Questi tre processi si differenziano per come utilizzano le risorse produttive, vale a dire manodopera e teflon. In particolare, in un'ora, ciascun processo richiede un certo numero di operai (dunque, di ore/uomo) e una certa quantità di teflon. Sempre in un'ora, ciascun processo produce una certa quantità di plastica A e di plastica B (vedi tabella). Nel prossimo periodo sono disponibili complessivamente 800 ore/uomo e 450 kg di teflon. Un kg di plastica A viene venduta a 16 euro, un kg di plastica B a 14 euro. Determinare come attivare i vari processi in modo da massimizzare il profitto.

	operai	teflon (kg)	plastica A (kg)	plastica B (kg)
processo 1	2	1	0,23	0,15
processo 2	3	2	0,4	0,35
processo 3	4	2	0,5	0,25

Tabella 1: Assorbimento di risorse e produzione di plastiche in un'ora di ciascun processo.

87

Antonio e Beatrice devono dividersi una serie di pratiche da svolgere. Le pratiche da svolgere si dividono in 4 diverse categorie, e sono anche lavorabili da Antonio e Beatrice simultaneamente. In una giornata lavorativa, Antonio è in grado di completare 20 Acquisti, oppure 40 Bonifici, oppure 60 Catalogazioni, oppure 25 DataProcessing. In una giornata lavorativa, Beatrice riesce a completare 8 Acquisti, oppure 50 Bonifici, oppure 80 Catalogazioni oppure 40 DataProcessing. I dati del problema sono rappresentati nella seguente tabella. Formulare il problema di PL per decidere come Antonio e Beatrice

	Numero di Pratiche da svolgere
Acquisti	50
Bonifici	100
Catalogazione	150
DataProcessing	230

possano dividersi le pratiche in modo da riuscire a terminare il lavoro prima possibile.

88

La Melamangio azienda agricola specializzata in produzione di mele deve decidere la produzione per il prossimo anno. Sono possibili quattro produzioni. Nella tabella, tutti

$X_A =$ #torte di tipo A prodotte (kg)

184

$X_B =$ " " " B "

$X_P =$ Panna prodotta ^(in kg) ~~elaborata~~ complessivamente

f.o.b. $\left[\max 10X_A + 15X_B + 3(X_P - 0,2X_A - 0,4X_B) \right]$

Panna impiegata per le torte di tipo A: $0,2X_A$

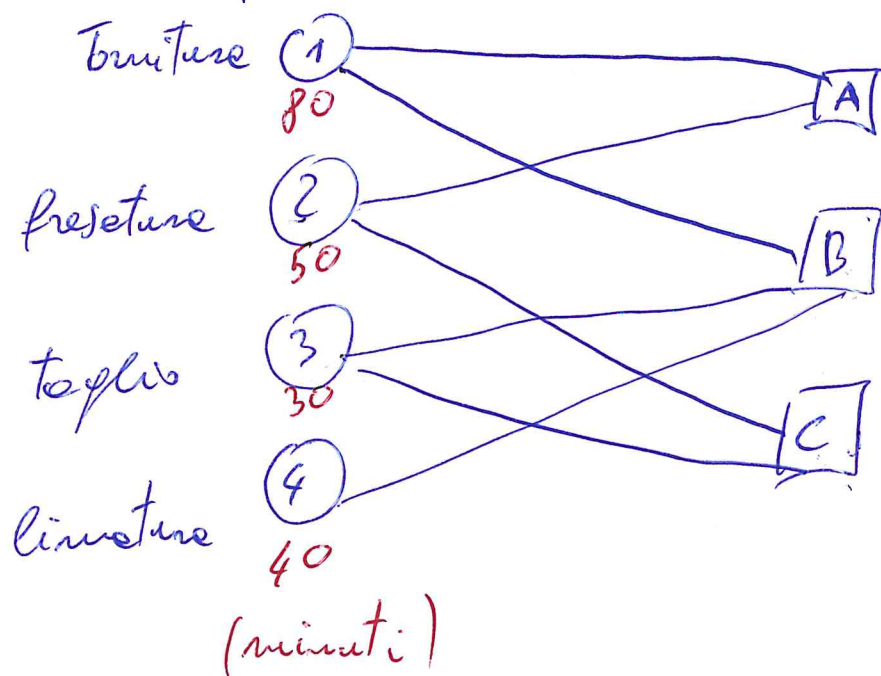
" " " " " " B: $0,4X_B$

$$\begin{cases} 0,5X_A + 0,6X_B + 0,7X_P \leq 25 \\ 0,3X_A + 0,2X_B + 0,3X_P \leq 15 \\ X_P \geq 0,2X_A + 0,4X_B \\ X_A \geq 0 \quad ; \quad X_B \geq 0 \quad ; \quad X_P \geq 0 \end{cases}$$

operazioni

centri (macchine)

(185)



ciascun

Assegnare le risorse (minuti) di operazione ai centri in modo da terminare tutte le operazioni il prima possibile -

- Le operazioni possono essere ripartite in più centri
- un centro esegue le operazioni in modo sequenziale -

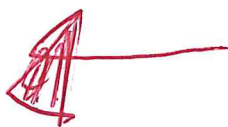
X_{1A}	=	minuti di op. 1 eseguiti nel centro A	≥ 0
X_{1B}	=	" " " 1 " " " "	$B \geq 0$
X_{2A}	=	" " " 2 " " " "	$A \geq 0$
X_{2C}	=	" " " 2 " " " "	$C \geq 0$
X_{3B}	=	" " " 3 " " " "	$B \geq 0$
X_{3C}	=	" " " 3 " " " "	$C \geq 0$
X_{4B}	=	" " " 4 " " " "	$B \geq 0$

$$X_{1A} + X_{1B} = 80$$

$$X_{2A} + X_{2C} = 50$$

$$X_{3B} + X_{3C} = 30$$

$$X_{4B} = 40$$



Carico di lavoro dei centri.

$$\left. \begin{array}{llll} \text{Quanto lavoro il centro A?} & X_{1A} + X_{2A} \\ // & // & // & // & \text{B?} & X_{1B} + X_{3B} + X_{4B} \\ // & // & // & // & \text{C?} & X_{2C} + X_{3C} \end{array} \right\} =$$

⇒ il max coincide con la fine di tutte le operazioni

$$\Rightarrow \max \{ X_{1A} + X_{2A}; X_{1B} + X_{3B} + X_{4B}; X_{2C} + X_{3C} \}$$

$$\Rightarrow \min \max \{ X_{1A} + X_{2A}; X_{1B} + X_{3B} + X_{4B}; X_{2C} + X_{3C} \}$$

funzione non lineare!

Nuove variabili $z \geq 0$

Equivalenti

$$\min z$$

$$z \geq X_{1A} + X_{2A}$$

$$z \geq X_{1B} + X_{3B} + X_{4B}$$

$$z \geq X_{2C} + X_{3C}$$

**MODELLO DI
PROGRAMMAZIONE
LINEARE**

Problema delle Diete

(187)

Portioni

	Panne (x_1)	latte (x_2)	uova (x_3)	carne (x_4)	dolce (x_5)
Calorie (cal)	110	160	180	260	420
proteine (g)	4	8	13	14	4
calci (mg)	2	285	54	80	22
costo (€)	2	3	4	19	20
maximo di portioni illimitate	4	8	3	2	2

Dieta

almeno 2000 Calorie
 50g di proteine
 700mg di calcio.

$X_T = \#$ di porzioni dell'elemento T da inserire nella dieta - $T=1, \dots, 5$ (189)
1 = pane ; 2 = latte ; ... 5 = dolce

$$X_T \geq 0 \quad T=1, \dots, 5$$

$$\min \quad 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 19X_4 + 20X_5$$

$$110X_1 + 160X_2 + 180X_3 + 260X_4 + 420X_5 \geq 2000$$

$$4X_1 + 8X_2 + 13X_3 + 14X_4 + 4X_5 \geq 50$$

$$2X_1 + 285X_2 + 54X_3 + 80X_4 + 22X_5 \geq 700$$

$$X_1 \leq 4 ; X_2 \leq 8 ; X_3 \leq 8 ; X_4 \leq 2 ; X_5 \leq 2$$

$$X_T \geq 0 \quad T=1, \dots, 5$$

Produzione di batterie

189

Produzione di batterie			Ricavo
Tipi	RAME (kg)	costo materie Euro	Euro/scatole
A	—	12	25
B	1	6	20
G	2	4	30

4000 kg di carne disponibile

5 Euro/kg costo del rumore

- le scatole di A prodotte devono essere almeno il ~~due~~ doppio di quelle di B
- le scatole di A prodotte inferiori alle scatole di B

$X_A = \#$ 1 0 1 1 1 A 111
 $X_B = \#$ " " " " B " "
 $X_G = \#$ " " " " G "

$$\text{Profit} = 25X_A + 20X_B + 30X_G - 5X_B - 10X_G \\ - 12X_A - 6X_B - 4X_G = 13X_A + 9X_B + 16X_G$$

$$\max 13x_A + 9x_B + 16x_C$$

$$X_B + 2X_G \leq 4000$$

$$X_A \geq 2X_B$$

$$X_A \leq X_G$$

$$x_A, x_B, x_G \geq 0$$