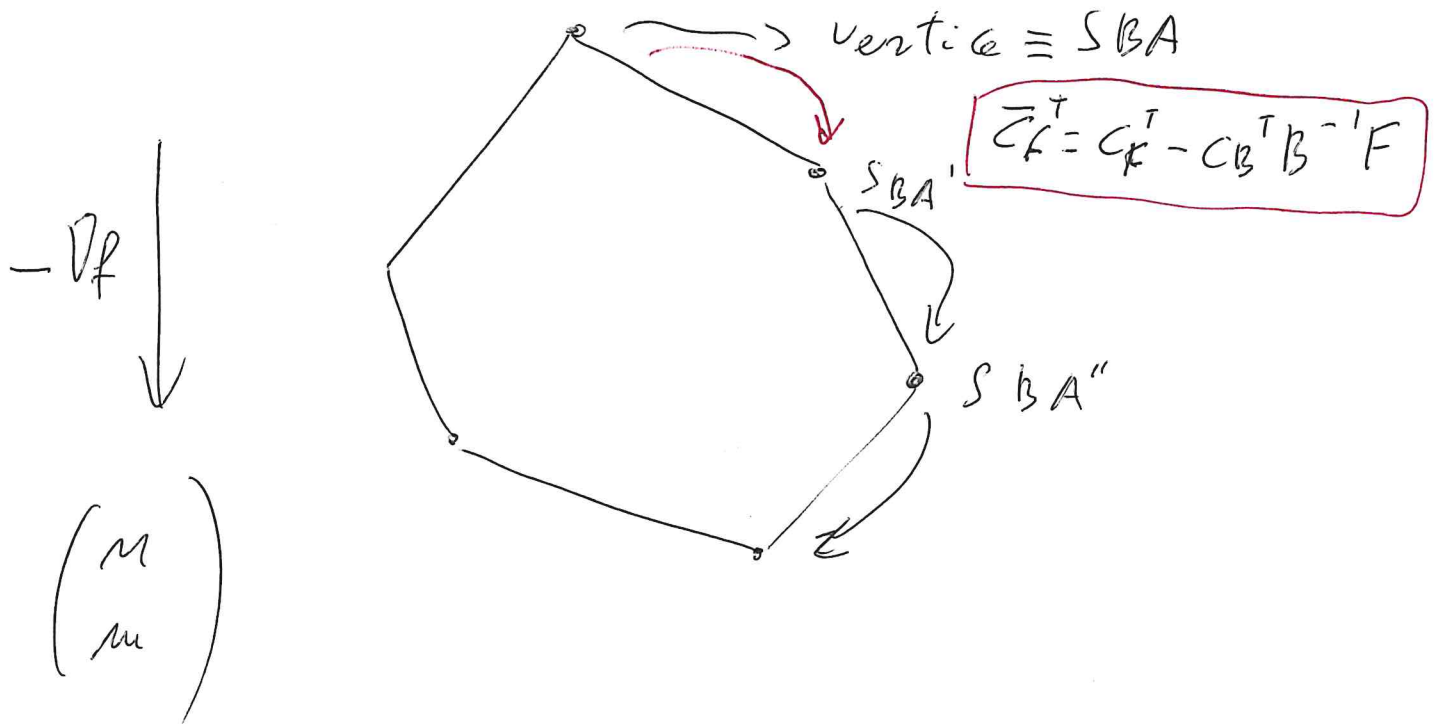




Date B base ammissibile di A
 B e le soluzioni ammissibili di base
 si dicono DEGENERI se $x_B = B^{-1}b$
 ha qualche componente nulla

$$\underline{SBA} \quad X = \begin{pmatrix} x_B \\ - \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

allo stesso vertice possono
 corrispondere diverse base B e SBA .

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(1) B^1 = (A_1, A_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) B^2 = (A_2, A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) B^3 = (A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

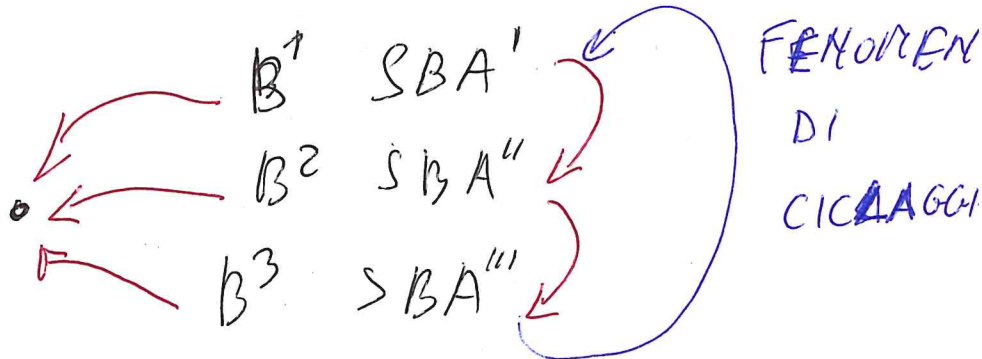
$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B^1, B^2, B^3 sono
base degeneri.

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vertice



REGOLA ANTICICLAGGIO DI BLAND

Ogni volta in cui si può scegliere, scegliere la variabile x_h da far entrare in base con indice " h " minimo, scegliere la variabile $x_{p(t)}$ da far uscire dalle base con indice $p(t)$ minimo.

In particolare:

- Se ho più variabili fuori base $x_h : \bar{c}_h < 0$
 $\Rightarrow$ scegliere entrare in base la variabile con indice " h " minimo.

- Se ho più variabili in base $x_{p(t)}$ tali che
 $\theta = \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{th}}$ è il ~~minimo~~ l'incremento max
della variabile x_h

$\Rightarrow$ far uscire dalle base la variabile $x_{p(t)}$
con indice " $p(t)$ " minimo.

$\Rightarrow$ Il metodo del simplesso termina
dopo al più $\binom{n}{m}$ iterazioni

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

un vertice x^* è ottimo se

(1) $\bar{x}$ Soluzione di base ammissibile

$$x^* = \begin{pmatrix} x_B \\ \bar{x}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ -0 \end{pmatrix} \geq 0$$

(2) Soddisfa il Test di ottimalità

$$\rightarrow \left[\bar{c}_F^T = c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0 \right]$$

~~Def~~ Dato un base B ammissibile di A

$$c^T = (c_B^T \mid c_F^T)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \bar{x}_F \end{pmatrix}$$

$$A = (B \mid F)$$

~~Def~~ Il vettore di costi ridotti si può scrivere:

$$\bar{c}^T = (\bar{c}_B^T \mid \bar{c}_F^T) = \boxed{c^T - c_B^T B^{-1} A} =$$

$$= (c_B^T \mid c_F^T) - c_B^T B^{-1} (B \mid F) = (c_B^T \mid c_F^T) - (c_B^T \mid c_B^T B^{-1} F)$$

$$= \left(0 \mid \underbrace{c_F^T - c_B^T B^{-1} F}_{\bar{c}_F^T} \right)$$

I costi ridotti delle variabili in base sono sempre nulli

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema Duale

$$\begin{aligned} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{aligned}$$

Dato un base B
ammissibile
la SBA associata $\bar{c}$
ottenere se

$$(1) \quad x^* = \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow c^T x^* = c_B^T B^{-1}b$$

↳ Valore della
f. ob. nella SBA
 x^*

$$(2) \quad \bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1}A \geq 0^T$$

Se poniamo $u^* = c_B^T B^{-1}$ $u^* \in \mathbb{R}^m$

$$(1) \Rightarrow c^T x^* = u^{*T} b = b^T u^*$$

Dualità forte!
Condizione di
ottimalità per i
problemi primali e
duali

$$(2) \quad \bar{c}^T = c^T - u^{*T}A \geq 0^T \Leftrightarrow c - A^T u^* \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{A^T u^* \leq c}$$

Ammissibilità
problema duale

Sensibilità delle soluzioni ottime alle variazioni dei parametri di un problema di PL

(Data)

$$\min c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Sia B ammissibile eotta
 SBA
 ottime $x^* = \begin{pmatrix} x_B \\ - \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ - \\ 0 \end{pmatrix}$

Data: $\boxed{c}$, A , $\boxed{b}$

1) $B^{-1}b \geq 0$ cond. ammissibili

2) $\bar{c}_F^T = c_F^T - c_B^T B^{-1}F \geq 0$
 cond. di ottimalità

Variazione del vettore dei termini noti b

$b \rightsquigarrow b + \Delta b = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \vdots \\ b_m + \Delta b_m \end{pmatrix}$

1) $B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0 \Rightarrow B^{-1}\Delta b \geq -B^{-1}b$

m disequazioni nelle m incognite $\Delta b_1, \dots, \Delta b_m$

2) non cambia

$c^T x^* = c_B^T B^{-1}b$

le nuove SBA

$c^T \bar{x} = c_B^T B^{-1}b + c_B^T B^{-1}\Delta b$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}(b + \Delta b) \\ - \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ - \\ x_F \end{pmatrix}$

$\Delta = c^T \bar{x} - c^T x^* = c_B^T B^{-1}\Delta b$

$u^{*T} \rightarrow$ soluzione ottime duale

$\Delta = c_B^T B^{-1}\Delta b = u^{*T} \Delta b = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i^* \Delta b_i$

Per i valori u_i delle variabili duali ed ottimizziamo la variazione della funzione obiettivo alla variazione dei termini noti b_i ($b_i \rightarrow b_i + \Delta b_i$)

Variazione dei costi c

Variazione dei costi c_F delle variabili x_F

$$c_F \rightsquigarrow c_F + \Delta c_F$$

1) non cambia $B^{-1}b \geq 0$

$$2) \tilde{c}_F = \underbrace{c_F^T + \Delta c_F^T - \bar{c}_B^T B^{-1}F}_{\bar{c}_F^T} = \bar{c}_F^T + \Delta c_F^T \geq 0^T$$

$$\Rightarrow \Delta c_F \geq -\bar{c}_F \Rightarrow (\Delta c_F)_1 \geq -(\bar{c}_F)_1$$

$$(\Delta c_F)_2 \geq -(\bar{c}_F)_2$$

$$\vdots$$

$$(\Delta c_F)_{m-m} \geq -(\bar{c}_F)_{m-m}$$

m-m conditions

$$(\Delta c_F)_j \geq -\bar{c}_j \quad j=1, \dots, m-m$$

$\Rightarrow$ Il costo ridotto di una variabile x_j è il massimo decremento che può subire il costo c_j affinché la base B e la SBA rimangano ottimali.

Variazioni dei costi c_B

$$c_B \rightsquigarrow c_B + \Delta c_B$$

$$\Delta c_B = \begin{pmatrix} \Delta c_{B1} \\ \Delta c_{B2} \\ \vdots \\ \Delta c_{Bm} \end{pmatrix}$$

1) non cambia $B^{-1}b \geq 0$

$$2) \tilde{c}_F^T = \underline{c_F^T} - (\underline{c_B^T} + \Delta c_B^T) \underline{B^{-1}F} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_F^T = \bar{c}_F^T - \Delta c_B^T B^{-1}F \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta c_B^T B^{-1}F \leq \bar{c}_F^T$$

Sistemi di m equazioni
nelle m variabili $\Delta c_{B1}, \Delta c_{B2}, \dots, \Delta c_{Bm}$

$$c^T x^* = c_B^T B^{-1}b$$

$$\tilde{c}^T \tilde{x} = \underline{(c_B^T + \Delta c_B^T) B^{-1}b}$$

$$\tilde{x} = x^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Produzione di batterie

Tipi	RAME (Kg)	costo materie Euro	Ricavo Euro/Scatole
A	—	12	25
B	1	6	20
G	2	4	30

4000 Kg di rame disponibili

5 Euro/Kg costo del rame

- le scatole di A prodotte devono essere almeno il doppio di quelle di B
- le scatole di A prodotte inferiori alle scatole di G

X_A = # di scatole di Tipo A prodotte
 X_B = # " " " " B "
 X_G = # " " " " G "

$$\text{Profitto} = 25X_A + 20X_B + 30X_G - 5X_B - 10X_G - 12X_A - 6X_B - 4X_G = 13X_A + 9X_B + 16X_G$$

$$\max 13X_A + 9X_B + 16X_G$$

$$X_B + 2X_G \leq 4000$$

$$X_A \geq 2X_B$$

$$\Rightarrow X_A - 2X_B \geq 0$$

$$X_A \leq X_G$$

$$\Rightarrow X_G - X_A \geq 0$$

$$X_A, X_B, X_G \geq 0$$

Stabile la soluzione in cui:

$$x_A^* = 2000$$

$$x_B^* = 0$$

$$x_G^* = 2000$$

ottimo o no

$$\text{min} - 13x_A - 9x_B - 16x_G$$

$$(1) x_B + 2x_G + s_1 = 4000$$

$$(2) x_A - 2x_B - s_2 = 0$$

$$(3) x_G - x_A + x_G - s_3 = 0$$

$$x_A, x_B, x_G, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} A_B & A_G & A_{s_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_A \\ x_G \\ s_2 \end{pmatrix} \quad x_F = \begin{pmatrix} x_B \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\bar{C}_F = C_F^T - C_B^T B^{-1} F \geq 0}}$$

f. ob. in funzione variabili libere

$$(1) x_G = 2000 - \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}s_1$$

$$(3) x_A = x_G - s_3 = 2000 - \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}s_1 - s_3$$

$$C^T x = -13 \left(2000 - \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3 \right) - 9x_B$$

$$-16 \left(2000 - \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}s_1 \right) =$$

$$= \left(\frac{13}{2} - 9 + 8 \right) x_B + \left(\frac{13}{2} + 8 \right) s_1 + \frac{13s_3}{2} - 58.000$$

$$\bar{C}_B > 0$$

$$\bar{C}_{s_1} > 0$$

$$\bar{C}_{s_3} > 0$$

soluzione ottima!!

$$\min -13x_A - 9x_B - 16x_G$$

$$\begin{cases} y_1 & -x_B - 2x_G \geq -4000 \\ y_2 & x_A - 2x_B \geq 0 \\ y_3 & -x_A + x_G \geq 0 \end{cases}$$

$$x_A \geq 0; x_B \geq 0; x_G \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{DUALE}$$

$$\max -4000 y_1$$

$$\begin{cases} x_A & y_2 - y_3 \leq -13 \\ x_B & -y_1 - 2y_2 \leq -9 \\ x_G & -2y_1 + y_3 \leq -16 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Conditione di complementarità

$$x_A^* \neq 0 \quad x_G^* \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_2 - y_3 = -13 \\ -2y_1 + y_3 = -16 \end{cases} //$$

Seconda vincolo primale non soddisfatto $\boxed{=}$

$$\Rightarrow y_2^* = 0 \Rightarrow y_3^* = 13 \quad ; \quad y_1^* = +\frac{29}{2}$$

$$c^T x^* = b^T y^* = -58.000$$

buonità forte

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$\Downarrow$

$$\max b^T y$$

$$A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

$$x_A^* = 2000$$

$$x_B^* = 0$$

$$x_G^* = 2000$$

$$\min -3x_1 - 5x_2 - 2x_3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

① Verificare che
 $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 3$
 sia ottimale

② Per quale variazione
 di $c_2 = -5$ lo sol.
 rimane ottimale

Prob. in forma standard

$$\min -3x_1 - 5x_2 - 2x_3$$

$$\textcircled{1} x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$\textcircled{2} x_2 - x_3 + s_2 = 2$$

$$\textcircled{3} x_1 + x_3 + s_3 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$s_1^* = 0, s_2^* = 1, s_3^* = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} A_2 & A_3 & A_{s_2} \end{pmatrix}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$$

$$B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$X_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Soluzione
 di base
 ammissibile

$$(1) \Rightarrow \boxed{x_2 = 4 - x_1 - s_1}$$

$$(2) + (3) \Rightarrow x_1 + x_2 + s_2 + s_3 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s_2 = 1 + s_1 - s_3}$$

$$(3) \boxed{x_3 = 3 - x_1 - s_3}$$

$$c^T x = -3x_1 - 5(4 - x_1 - s_1) - 2(3 - x_1 - s_3) =$$

$$= -26 + 4x_1 + 5s_1 + 2s_3$$

$$\bar{c}_1 > 0 \quad \bar{c}_{s_1} > 0 \quad \bar{c}_{s_3} > 0 \quad || \text{Sol. opt.}$$

$$c_2 \rightsquigarrow c_2 + \Delta c_2$$

$$-5 \rightsquigarrow -5 + \Delta c_2$$

$$c^T x = -3x_1 + (-5 + \Delta c_2)(4 - x_1 - s_1) - 2(3 - x_1 - s_3)$$

$$= \underbrace{-26 + 4\Delta c_2}_{f.d.} + \underbrace{(4 - \Delta c_2)}_{\bar{c}_1 \geq 0} x_1 + \underbrace{(5 - \Delta c_2)}_{\bar{c}_{s_1} \geq 0} s_1 + \underbrace{2}_{\bar{c}_{s_3} > 0} s_3$$

$$4 - \Delta c_2 \geq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \leq 4$$

$$5 - \Delta c_2 \geq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \leq 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta c_2 \leq 4}$$

$$b_1 \rightsquigarrow b_1 + \Delta b_1$$

$$4 \rightsquigarrow 4 + \Delta b_1$$

$$(1) \quad x_2 = 4 + \Delta b_1 - x_1 - s_1$$

$$(3) \quad x_3 = 3 - x_1 - s_3$$

$$(2) + (3) \quad x_1 + x_2 + s_2 + s_3 = 5$$

$$\Rightarrow s_2 = 5 - x_1 - x_2 - s_3 =$$

$$= 5 - \cancel{x_1} - 4 - \Delta b_1 + \cancel{x_1} + s_1 - s_3 =$$

$$= 1 - \Delta b_1 + s_1 - s_3$$

$$\begin{cases} x_2 = 4 + \Delta b_1 - x_1 - s_1 \\ x_3 = 3 - x_1 - s_3 \\ s_2 = 1 - \Delta b_1 + s_1 - s_3 \end{cases}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} - B^{-1}F x_N$$

$$4 + \Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -4$$

$$1 - \Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 1 \Rightarrow$$

$$-4 \leq \Delta b_1 \leq 1$$

Esercitazione di Ricerca Operativa

1

La ditta Primavera SPA deve pianificare la produzione dei propri concimi per la prossima stagione. L'azienda produce tre tipi di concime (MegaGrow, GreenWave e BloomBoom). Il primo è sintetizzato a partire da elementi di base (azoto, fosforo e potassio in forma minerale). Gli altri due, oltre agli elementi di base, fanno uso del prodotto MegaGrow come ingrediente. La tabella mostra il quantitativo (in kg) di ciascun componente per ciascun kg di prodotto (i valori di azoto, fosforo e potassio indicati *non* includono quelli presenti in MegaGrow). La ditta dispone già di un certo quantitativo di ciascun componente in magazzino (in kg). Fino a ulteriori 1000 kg di ciascun componente possono essere acquistati ai prezzi indicati in tabella (*primo prezzo*). Oltre i primi 1000, è ancora possibile acquistare ulteriori kg di componenti, ma a prezzi più alti (*secondo prezzo*). Si supponga che tutto quanto viene prodotto viene poi venduto. Formulare come PL il problema di massimizzare il profitto (ricavi-costi) sapendo che non è possibile acquistare più di complessivi 7000 kg di componenti.

	azoto	fosforo	potassio	MegaGrow	Prezzo (€/kg)
MegaGrow	0.3	0.2	0.25		20
GreenWave	0.3	0.2	0.1	0.1	22
BloomBoom	0.2	0.3	0.2	0.1	26
Disponibilità (kg)	3500	3500	4000		
Primo prezzo (€/kg)	1,50	0,75	2		
Secondo prezzo (€/kg)	2	1,50	3		

2

Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \min & -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_3 \leq 3 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Sapendo che all'ottimo $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 3$, calcolare per quale intervallo di valori del coefficiente c_2 (attualmente pari a -5) tale soluzione rimane ottima.

X_M : quantità di concia M prodotta

X_G : " " " " G "

X_B : " " " " B "

y_A^1 : quantità di Azoto consumata al primo step

y_F^1 : " " Fosforo " " "

y_P^1 : " " Potassio " " "

y_A^2 : " " Azoto " " Secondo "

y_F^2 : " " Fosforo " " "

y_P^2 : " " Potassio " " "

Azoto
Consumato $0,3X_M + 0,3X_G + 0,2X_B \leq 3500 + y_A^1 + y_A^2$

Fosforo
Consumato $0,2X_M + 0,2X_G + 0,3X_B \leq 3500 + y_F^1 + y_F^2$

Potassio
Consumato $0,25X_M + 0,1X_G + 0,2X_B \leq 4000 + y_P^1 + y_P^2$

$$y_A^1 \leq 1000 ; y_F^1 \leq 1000 ; y_P^1 \leq 1000$$

$$y_A^1 + y_A^2 + y_F^1 + y_F^2 + y_P^1 + y_P^2 \leq 7000$$

$$0,1X_G + 0,1X_B \leq X_M$$

$$\max 20(X_M - 0,1X_G - 0,1X_B) + 22X_G + 26X_B - 1,5y_A^1 - 0,75y_F^1 - 2y_P^1 - 2y_A^2 - 1,5y_F^2 - 3y_P^2$$