

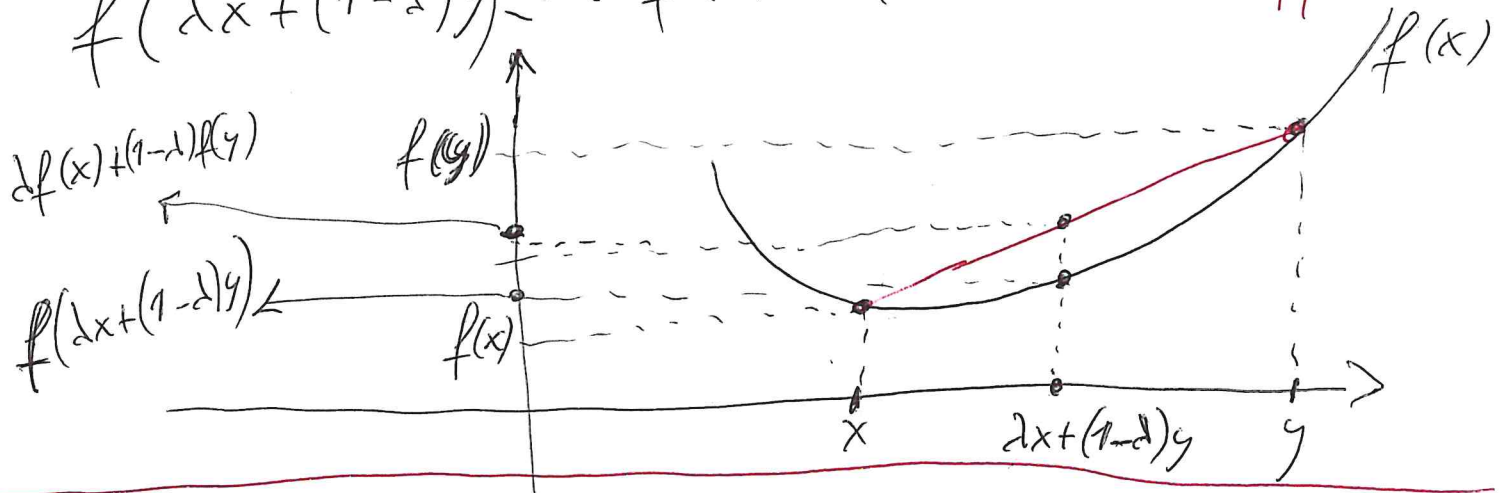
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x)$ é função convexa $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \text{||} \quad \text{A}$$



Definir $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ é convexa

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \exists \text{ h.c. de } f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$$

Se $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa in $\mathbb{R}^n$ (46)

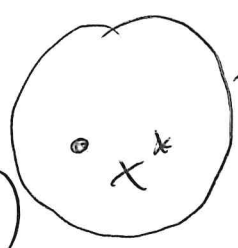
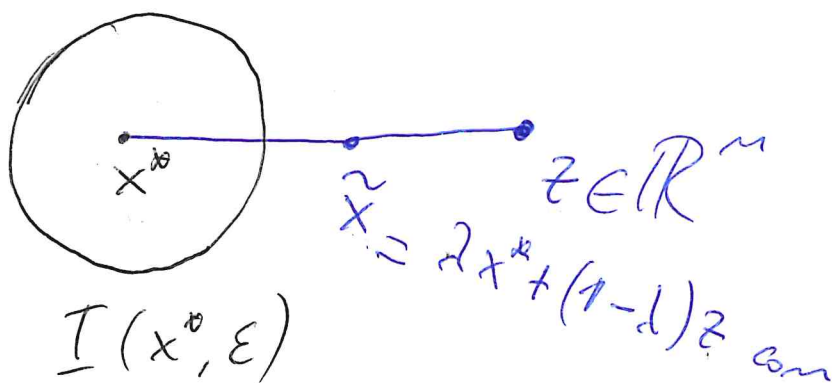
Se x^* è un minimo locale $\Rightarrow x^*$ è anche un minimo globale.

Dim.

Hp $f(x)$ convessa, $x^* \in \mathbb{R}^n$ minimo locale
Th x^* è un minimo globale.

Per Hp

$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in I(x^*, \varepsilon)$

A circle representing the neighborhood $I(x^*, \varepsilon)$ with a point x^* inside it. An arrow points from the circle to the label $I(x^*, \varepsilon)$.

Per $\lambda \rightarrow 1 \Rightarrow \tilde{x} \rightarrow x^* \Rightarrow \tilde{x} \in I(x^*, \varepsilon)$

$$\Rightarrow f(x^*) \leq f(\tilde{x}) = f(\lambda x^* + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(z)$$

└─── (λ → 1) ───┘ └───

$$\Rightarrow f(x^*) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(z) \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)f(x^*) \leq (1-\lambda)f(z) \Rightarrow$$

$$f(x^*) \leq f(z) \Rightarrow x^* \text{ è minimo globale} \quad \square$$

COND. NEC. E SUFF. MINIMO GLOBALE (47) PER FUNZIONI CONVESSE

Sia $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa
con gradiente $\nabla f(x)$ continuo in $\mathbb{R}^n$.

Il punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un minimo globale

$x^* \in \mathbb{R}^n$ se e solo se

$$\boxed{\nabla f(x^*) = 0}$$

DIM ($\Rightarrow$)

le condizioni necessarie delle
condizioni necessarie del 1° ordine -

Dimostriamo che la cond. è sufficiente ($\Leftarrow$)

Hp. $\nabla f(x^*) = 0$ Th x^* è un minimo globale

dato che $f(x)$ è convessa $\Rightarrow$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ si ha } f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$$

Quando $x = x^*$ $\Rightarrow$

$$f(y) - f(x^*) \geq \underbrace{\nabla f(x^*)}_{=0}^T (y - x^*) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x^*) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

x^* è un minimo globale. $\square$

$$f(x) = x_2^2 - 3x_1x_2 + 3x_1^2 - x_1 + x_2$$

(48)

$$f(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{funzione quadratica}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) \text{ costante}$$

Le $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva, poiché è costante,

$$\Rightarrow f(x) \text{ è convessa in } \mathbb{R}^n$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -3x_2 + 6x_1 - 1 \\ 2x_2 - 3x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(x)) = 12 - 9 = 3 > 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x) \text{ è def. positiva} \Rightarrow f(x) \text{ è convessa in } \mathbb{R}^n$$

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 + 6x_1 - 1 = 0 \\ (2x_2 - 3x_1 + 1 = 0) \times 2 \end{cases}$$

$$x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ è il minimo globale di } f(x)$$

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA (4)

$$\min f(x)$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n$$

$$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE NON LINEARE

$$\min f(x)$$

$$h_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$X \equiv \left\{ \begin{array}{l} h_1(x) = 0 \\ h_2(x) = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ m equations}$$

VINCOLI

$$f_{m+1}(x) \geq 0$$

$$f_{m+2}(x) \geq 0$$

$$\vdots$$

$$f_{m+p}(x) \geq 0$$



p-inequations

$$f_j(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$j = m+1, \dots, m+p$$

$\forall f(x), h_i(x), f_j(x)$ sono 2 volte continuamente differenziabili

Insieme dei vincoli attivi in punto $\bar{x} \in X$

Dato $\bar{x} \in X$, un vincolo si dice $f_j(x) \geq 0$

è attivo in $\bar{x}$ se $f_j(\bar{x}) = 0$

l'Insieme dei vincoli attivi in $\bar{x} \in X$ è
formato da tutti i vincoli soddisfatti all'uguaglianza
in $\bar{x}$:

1) $h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m$

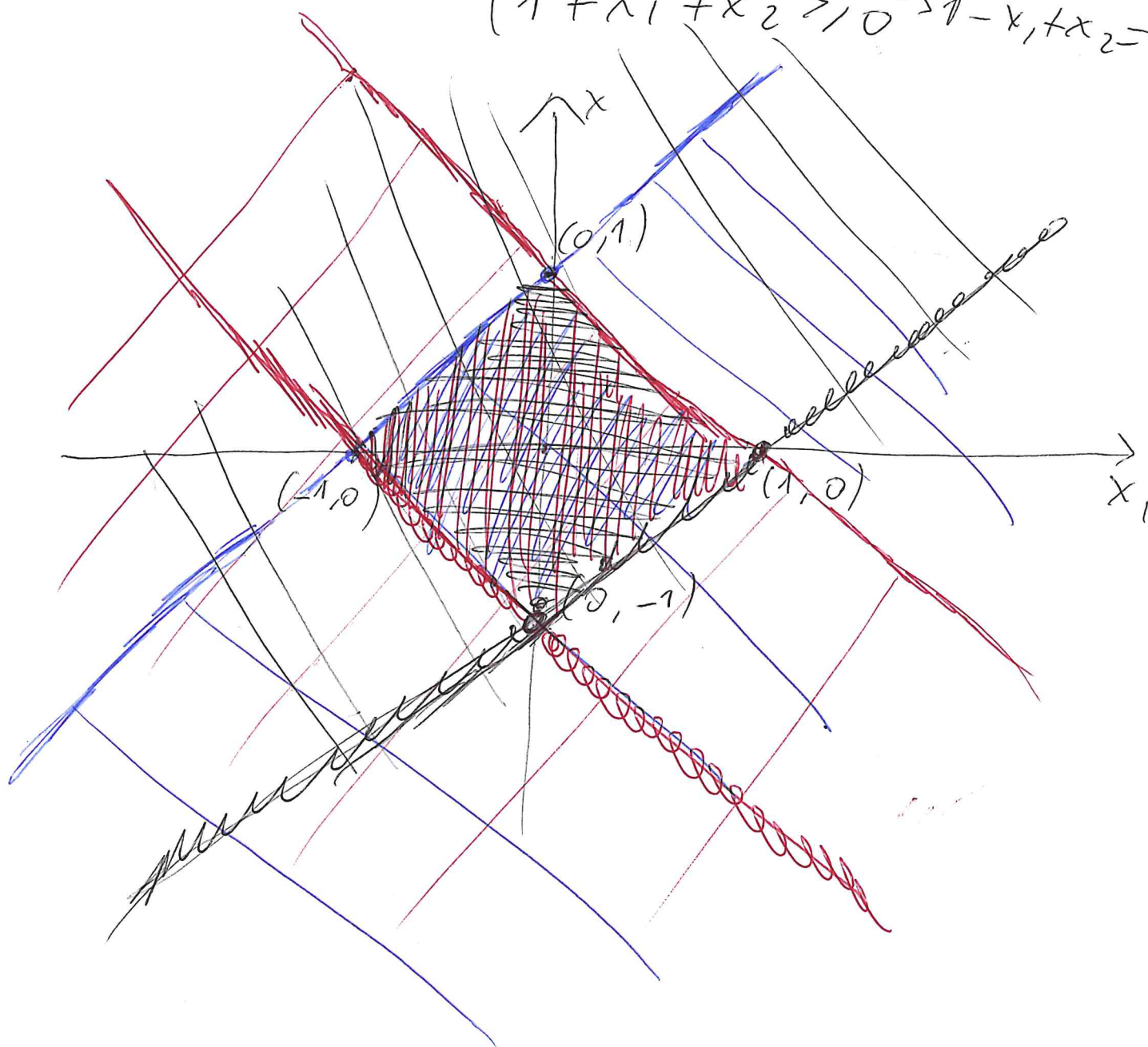
2) $f_j(x) \geq 0 : f_j(\bar{x}) = 0 \quad j = m+1, \dots, p$

$$X \equiv \left\{ \underbrace{1 - |x_1| - |x_2|}_{f_3(x)} \geq 0 \right.$$

$$X \subset \mathbb{R}^2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in X$$

$$1 - |x_1| - |x_2| \geq 0 \equiv \begin{cases} 1 - x_1 - x_2 \geq 0 \rightarrow 1 - x_1 - x_2 = 0 \\ 1 + x_1 - x_2 \geq 0 \\ 1 - x_1 + x_2 \geq 0 \\ 1 + x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \equiv X$$



$$X \equiv \{x \in \{0,1\}^n\}$$

(52)

$$X \equiv \begin{cases} x_1^2 - x_1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n^2 - x_n = 0 \end{cases} \equiv \{x \in \{0,1\}^n\}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 = 0 &\Rightarrow x_1(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \\ \vdots \\ x_i^2 - x_i = 0 &\Rightarrow x_i(x_i - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_i = 1 \\ x_i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\min f(x)$$

$$X \equiv h_1(x) = 0$$

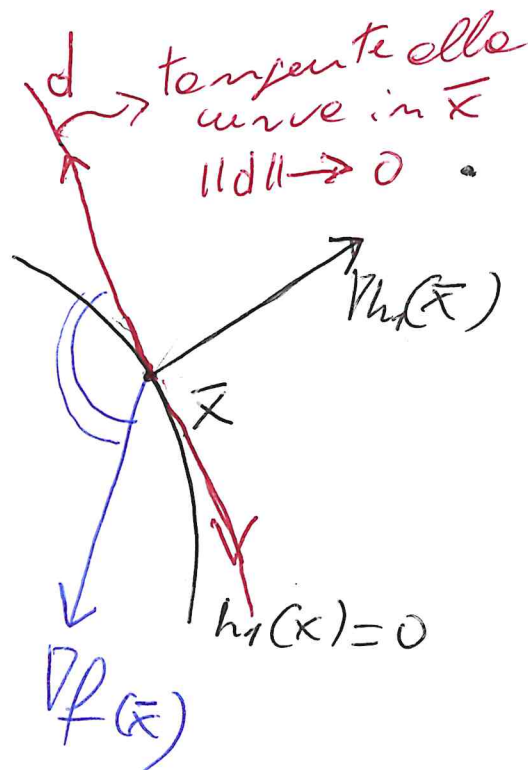
(53)

$$\bar{x} \in X \Rightarrow h_1(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{x} \rightsquigarrow \bar{x} + d \in X$$

1) d deve essere una direzione
e ammissibile

2) d deve essere direzione
di discesa: $\nabla f(\bar{x})^T \cdot d < 0$



$$\bar{x} \quad \bar{x} + d \quad h_1(\bar{x} + d) = 0?$$

$$h_1(\bar{x}) = 0$$

$$h_1(\bar{x} + d) = h_1(\bar{x}) + \nabla h_1(\bar{x})^T d + \beta_1(\bar{x}, d) = 0$$

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \frac{\beta_1(\bar{x}, d)}{\|d\|} = 0$$

per $\|d\| \rightarrow 0$

$$h_1(\bar{x} + d) \simeq h_1(\bar{x}) + \nabla h_1(\bar{x})^T d = 0 \Rightarrow$$

$\bar{x} + d$ è ammissibile se $\boxed{\nabla h_1(\bar{x})^T d = 0}$

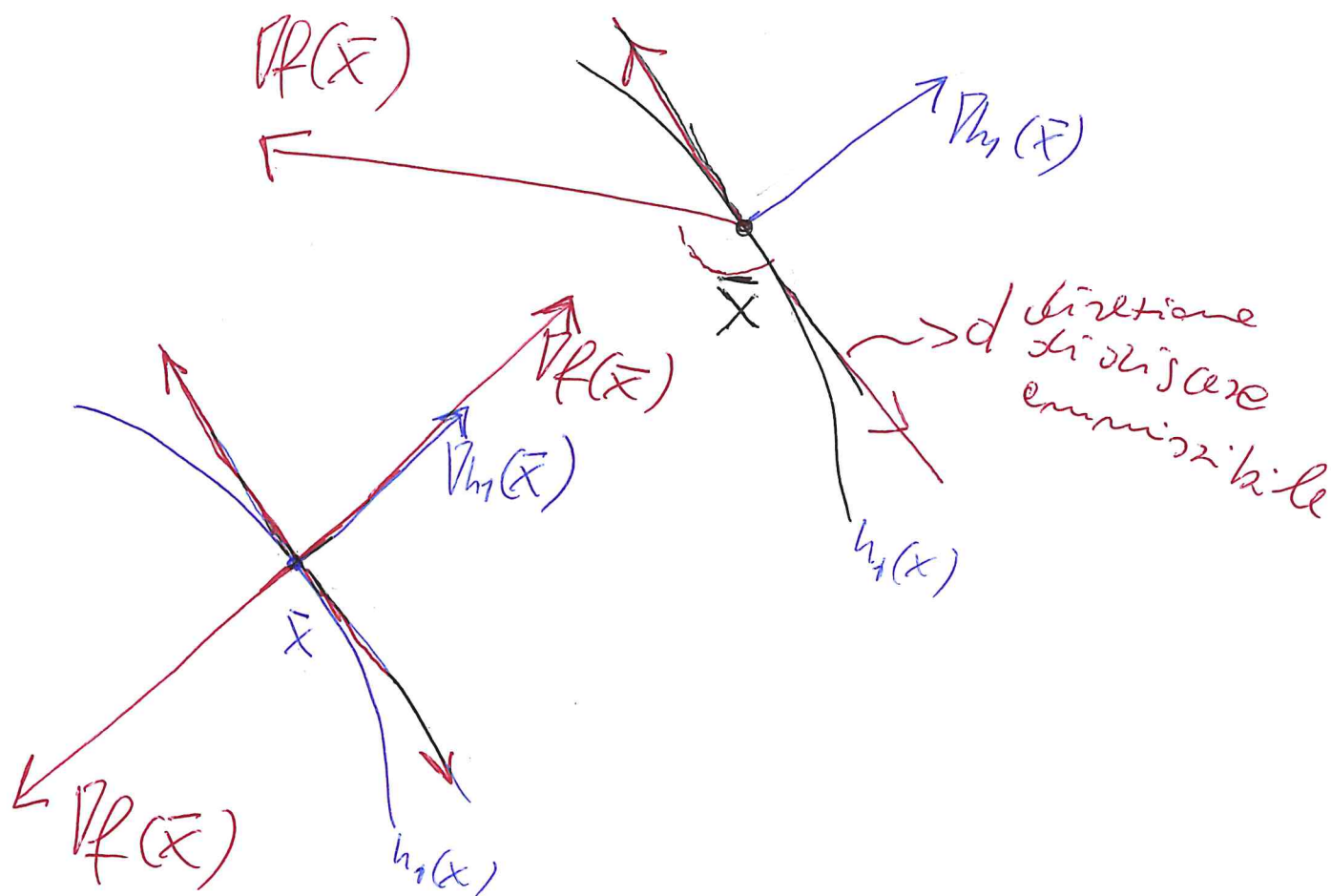
ovvero se $\nabla h_1(\bar{x})$ e d sono ortogonali.

$$\bar{x} \in X \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : h_1(x) = 0\}$$

(54)

$\bar{x}$ non è minimo locale se $\exists d$ tale che

- 1) d è direzione di discesa: $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$
- 2) d è direzione ammissibile: $\nabla h_1(\bar{x})^T d = 0$



Quando $\nabla f(\bar{x})$ e $\nabla h_1(\bar{x})$ sono paralleli.

$\nexists$ direzione di discesa ammissibile
vettori paralleli

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) \quad \text{con } \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

$$\min f(x)$$

$$X \equiv \{x \mid h_1(x) = 0\}$$

Funzione LAGRANGIANA

$$L(x, \lambda_1) = f(x) - \lambda_1 h_1(x)$$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ moltiplicatore di Lagrange associato
al vincolo $h_1(x) = 0$

$$\bar{x} \in X$$

$$\left[\nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) = 0 \right]$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) \quad \text{con } \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

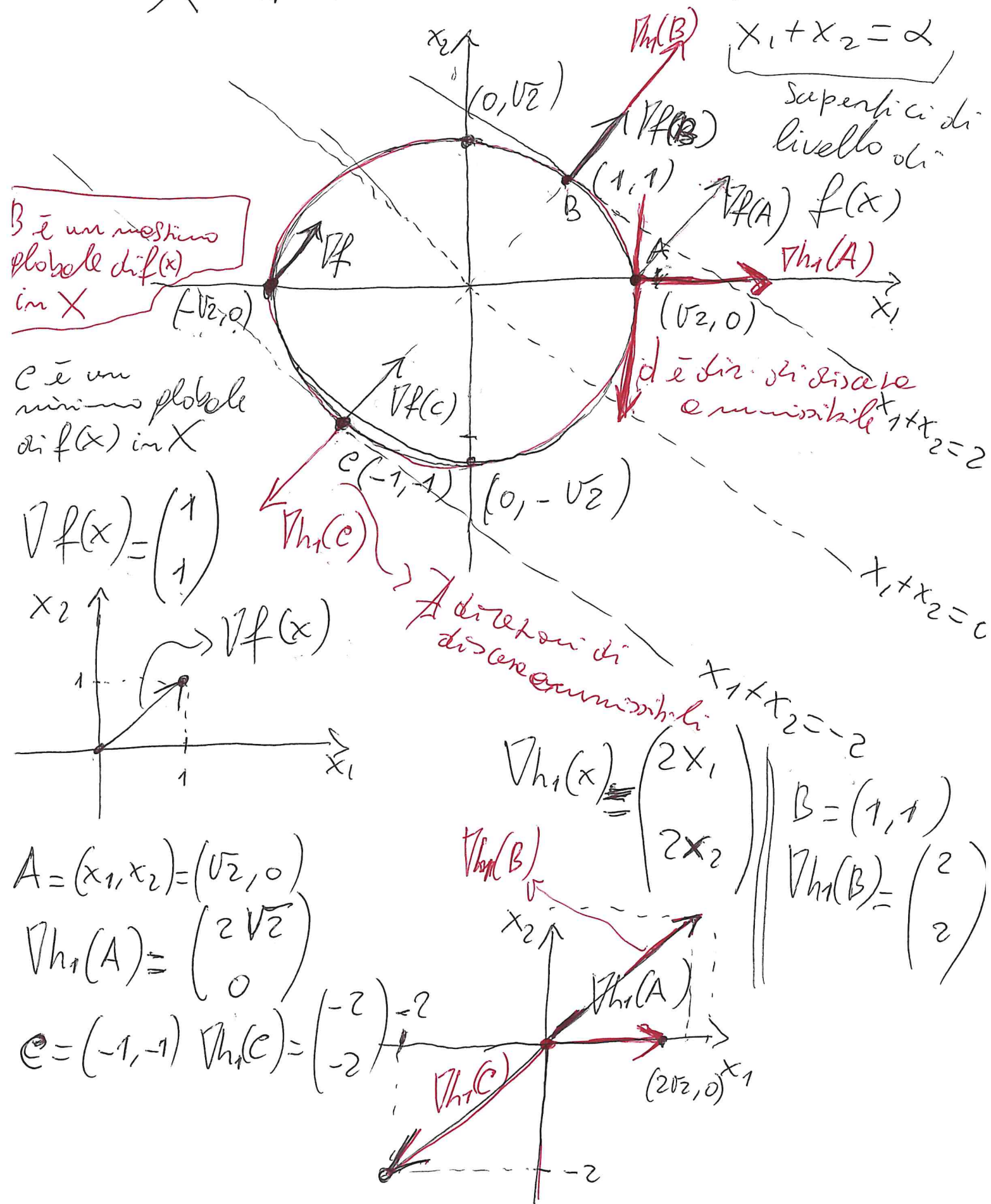
$\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x})$ e $\nabla h_1(\bar{x})$ sono paralleli.

$\Rightarrow \nexists$ direzione di discesa

ammissibile $\Rightarrow \bar{x}$ "potrebbe" essere
un minimo locale

$$\min x_1 + x_2 = f(x)$$

$$X \equiv h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$



$$\min f(x)$$

(57)

$$X \equiv f_1(x) \geq 0$$

$$\bar{x} \in X$$

$$\bar{x} \quad \bar{x}+d \quad f_1(\bar{x}+d) \geq 0$$

d è direzione di discesa se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$

Quando d è direzione ammissibile?

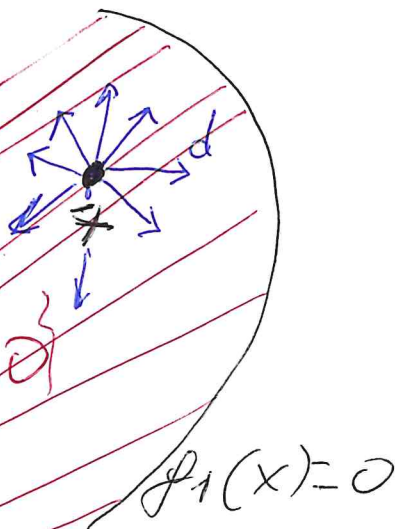
Consideriamo i 2 casi:

- 1) $f_1(x) \geq 0$ non è attivo in $\bar{x}$ ($f_1(\bar{x}) > 0$)
- 2) $f_1(x) \geq 0$ è attivo in $\bar{x}$ ($f_1(\bar{x}) = 0$)

Caso 1) $f_1(x)$ non attivo in $\bar{x}$, $f_1(\bar{x}) > 0$

Qualunque $d \in \mathbb{R}^n$
è direzione ammissibile
perché $\|d\|$ è piccolo

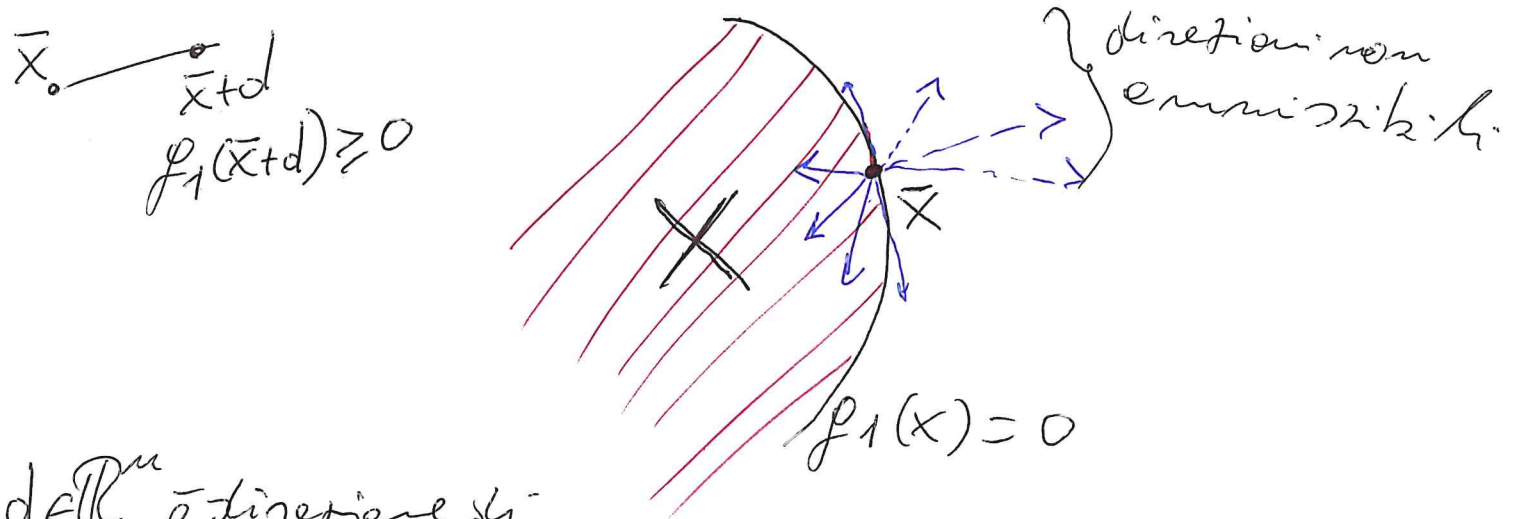
$$X \equiv \{x \mid f_1(x) \geq 0\}$$



$\Rightarrow \bar{x}$ è candidato a minimo se $\nexists$ una direzione di discesa $\Leftrightarrow \nexists d \in \mathbb{R}^n: \nabla f(\bar{x})^T d < 0$

$$\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$$

2) $f_1(x) \geq 0$ è attivo in $\bar{x}$: $f_1(\bar{x}) = 0$ (58)



$d \in \mathbb{R}^n$ è direzione di discesa se $\nabla f_1(\bar{x})^T d < 0$

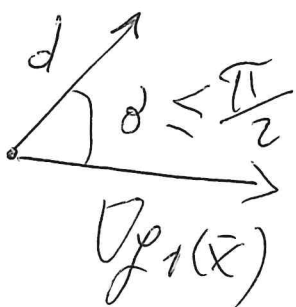
Quando $d \in \mathbb{R}^n$ è direzione ammissibile?

$$f_1(\bar{x}+d) = f_1(\bar{x}) + \nabla f_1(\bar{x})^T d + \beta_1(\bar{x}, d) \geq 0$$

quando $\|d\| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow f_1(\bar{x}+d) \approx \cancel{f_1(\bar{x})} + \nabla f_1(\bar{x})^T d \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f_1(\bar{x})^T \cdot d \geq 0} \Rightarrow d \in \mathbb{R}^n \text{ è direzione ammissibile}$$



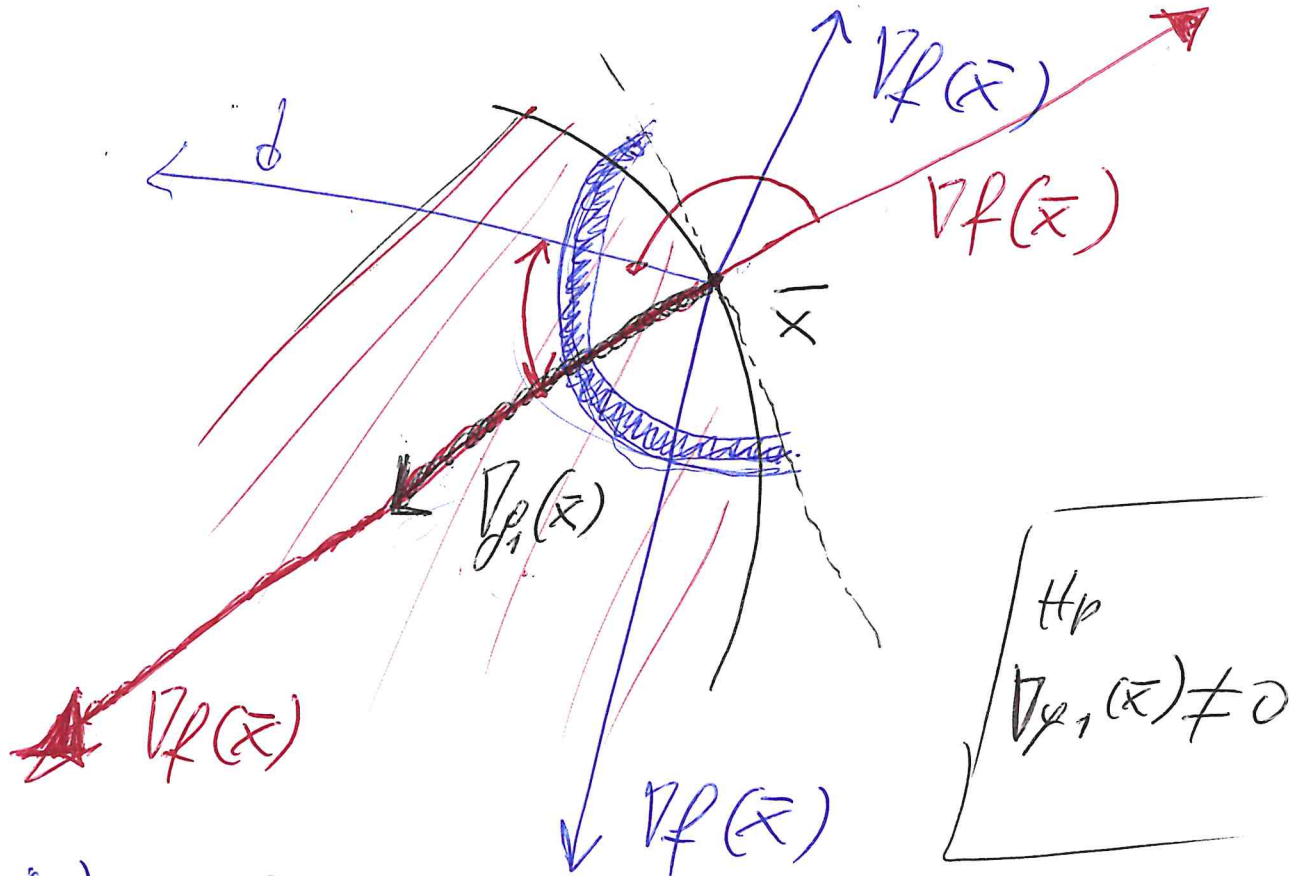
$\nabla f_1(\bar{x})$ e d formano un angolo non ottuso

Coro 2)

$\Rightarrow \bar{x}$ non è un minimo locale se $\exists d \in \mathbb{R}^n$:

a) $\nabla f(\bar{x})^T \cdot d < 0$ $\parallel d$ è dir. di discesa $\blacktriangleleft$

b) $\nabla f_1(\bar{x})^T \cdot d \geq 0$ $\parallel d$ è dir. ammissibile



Se $\nabla f_1(\bar{x})$ e $\nabla f(\bar{x})$ sono paralleli ed hanno lo stesso verso, non è possibile trovare una direzione di discesa ammissibile.

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x}) \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \geq 0 \quad]$$

$\text{KKT} \Rightarrow \bar{x}$ è un possibile minimo locale

$$\min f(x)$$

(60)

$$X \equiv f_1(x) \geq 0$$

Funzione LAGRANGIANA

$$L(x, \lambda_1) = f(x) - \lambda_1 f_1(x)$$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda_1 \geq 0$) è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo $f_1(x) \geq 0$

$\bar{A}$ o $\bar{x} \in \mathbb{R}$ direzione di direzione ammissibile ^{in $\bar{x}$}
se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

A) $\nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x}) = 0$ con $\lambda_1 \geq 0$

B) $\lambda_1 f_1(\bar{x}) = 0$ CONDIZIONE DI COMPLEMENTARIETÀ

1) $f_1(x)$ non è attivo in $\bar{x}$, $f_1(\bar{x}) > 0$

B) $\Rightarrow$ poiché $f_1(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A) $\Rightarrow \nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1) = \boxed{\nabla f(\bar{x}) = 0}$

2) $f_1(x)$ attivo in $\bar{x}$, $f_1(\bar{x}) = 0$

B) è sempre soddisfatta

A) $\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x})$ con $\lambda_1 \geq 0$ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x})$ e $\nabla f_1(\bar{x})$ sono paralleli con lo stesso verso

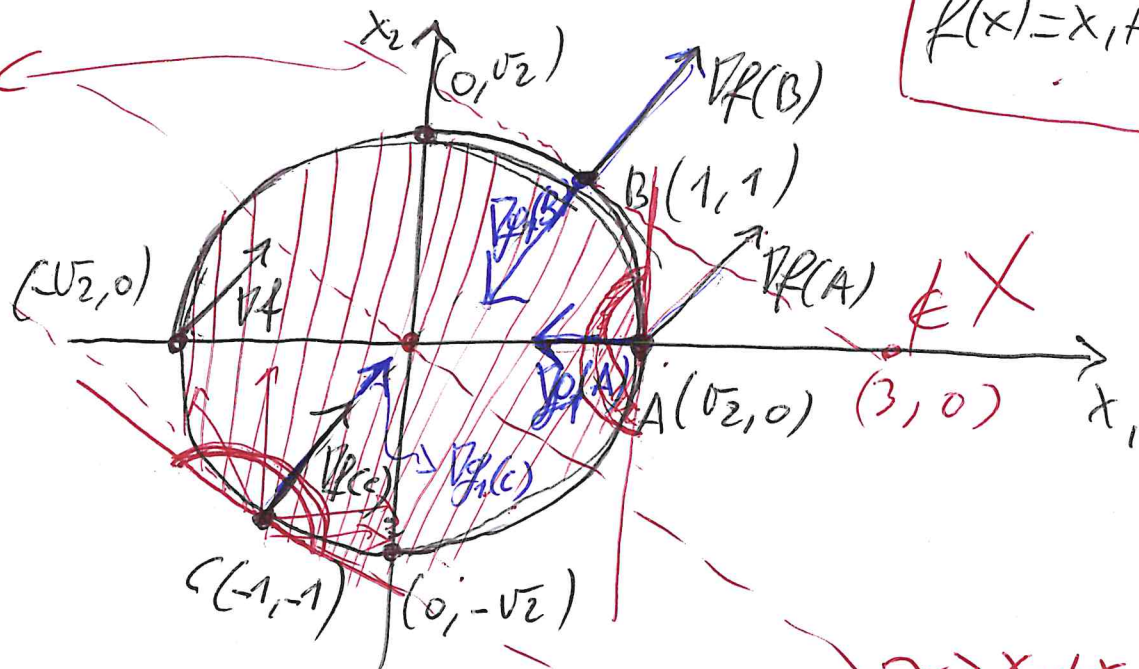
$$\min x_1 + x_2$$

(61)

$$X \equiv f_1(x) = 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$f(x) = x_1 + x_2 = 0$$



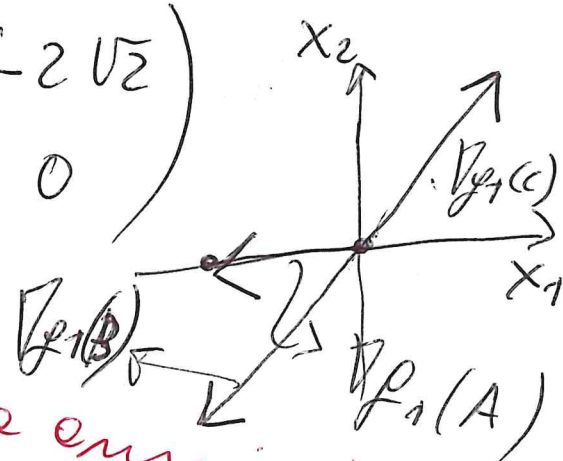
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = c \quad \left(x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b \right)$$

$\bar{e}$ un minimo globale $\bar{e}$ un max globale

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}; \quad \nabla f_1(A) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$d = \nabla f_1(A)$ è direzione di discesa ammissibile nel punto A



$\nabla f_1(B) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ad esempio $d = \nabla f_1(B)$ è una direzione di discesa ammissibile $\Rightarrow B$ non è minimo locale

$\nabla f_1(c) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\nabla f_1(c)$ e $\nabla f(c)$ sono paralleli con lo stesso verso $\Rightarrow$ non direzione di discesa ammissibile