

$$\min f(x)$$

60

$$X \equiv \begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \end{cases}$$

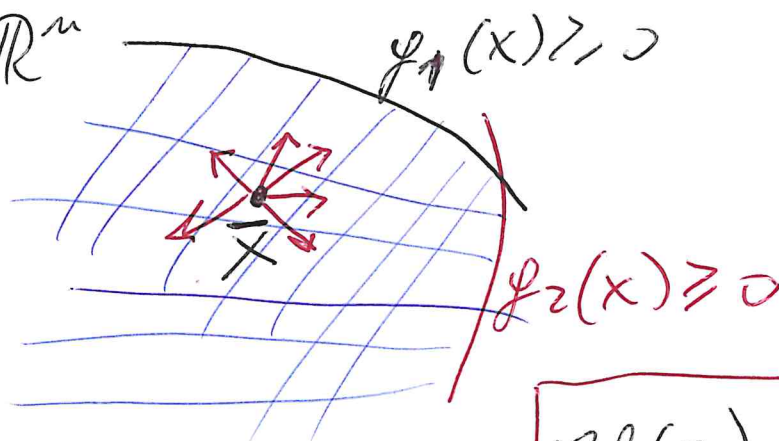
$$\bar{x} \in X$$

Quando non è possibile trovare una direzione di discesa ammissibile a partire dal punto $\bar{x}$?

4 casi:

1) In $\bar{x} \in X$ non è attivo nessun vincolo $\Rightarrow$
 $\Rightarrow f_1(\bar{x}) > 0$; $f_2(\bar{x}) > 0 \Rightarrow$ punto interno di X

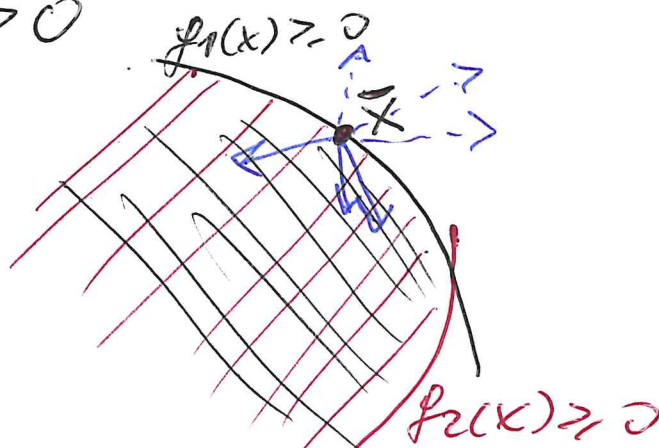
Ogni direzione $d \in \mathbb{R}^n$
 è ammissibile



$\Rightarrow d \in \mathbb{R}^n$ non è di discesa se

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

2) In $\bar{x} \in X$ $f_1(x) \geq 0$ è attivo e $f_2(x)$ non è attivo
 $\Rightarrow f_1(\bar{x}) = 0$; $f_2(\bar{x}) > 0$



∇f direzione di discesa ammissibile se (61)

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x}), \text{ con } \lambda_1 \geq 0 \iff$$

$\nabla f(\bar{x})$ e $\nabla f_1(\bar{x})$ sono paralleli con lo stesso verso.

3) In $\bar{x} \in X$ $f_1(x) \geq 0$ non è attivo e $f_2(x) \geq 0$ è attivo

$$\Rightarrow f_1(\bar{x}) > 0; f_2(\bar{x}) = 0$$

∇f direzione di discesa ammissibile se

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_2 \nabla f_2(\bar{x}) \text{ con } \lambda_2 \geq 0$$

4) $\bar{x} \in X$ attivo in $f_1(x) \geq 0$ e $f_2(x) \geq 0 \Rightarrow$

$$f_1(\bar{x}) = 0; f_2(\bar{x}) = 0$$

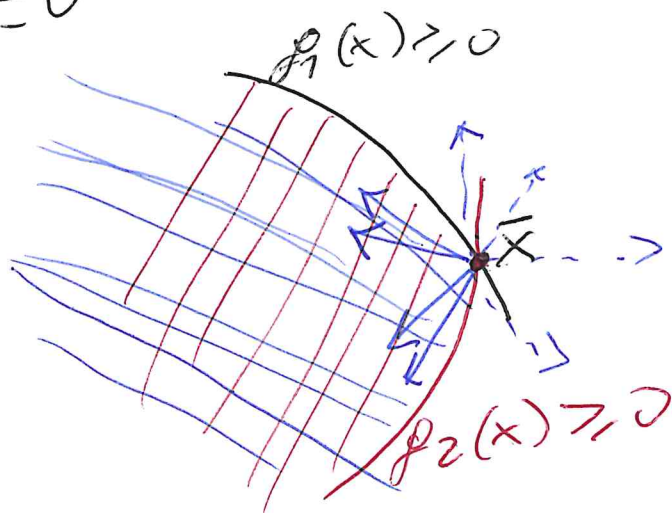
$d \in \mathbb{R}^n$ è direzione ammissibile se:

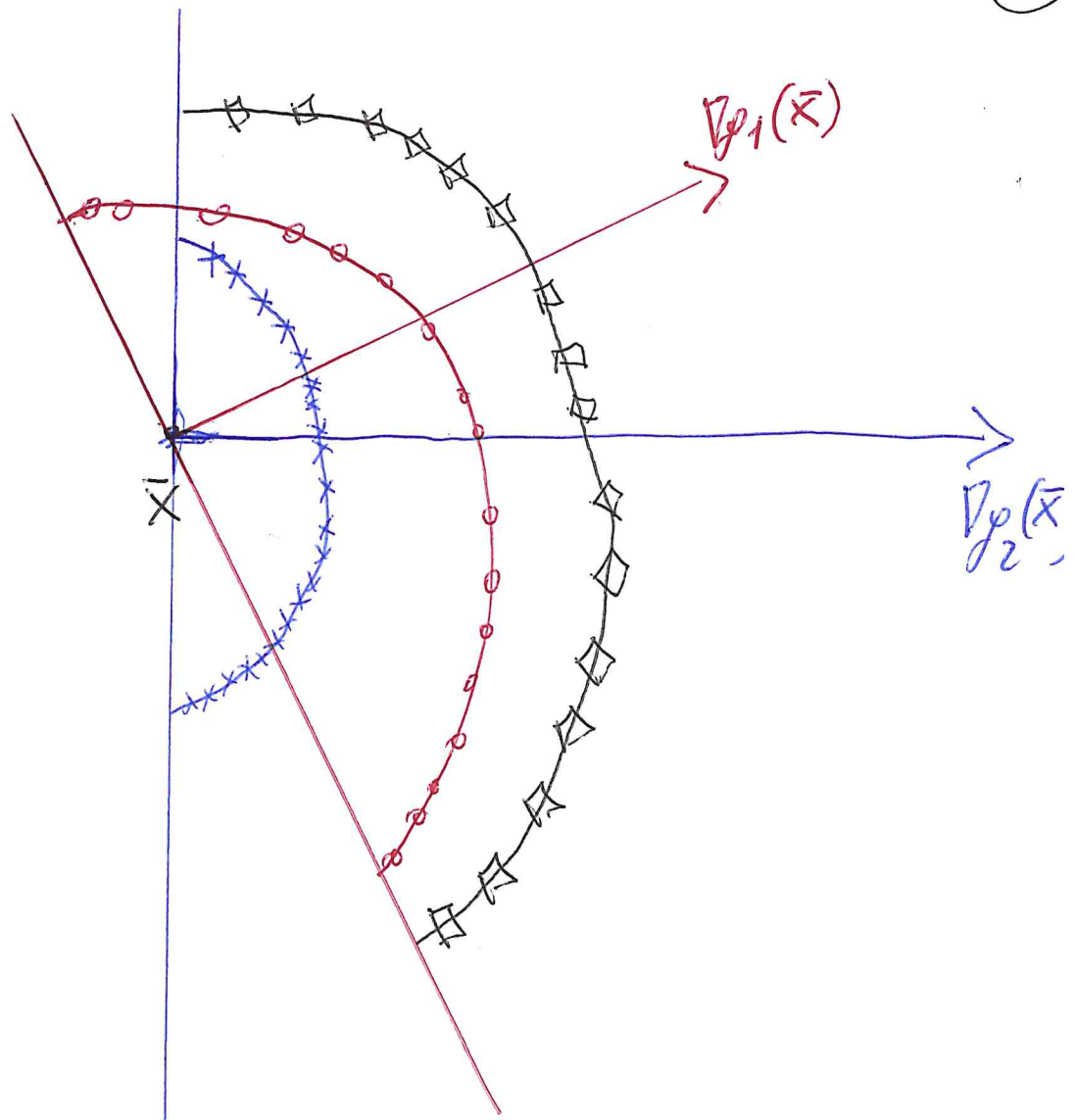
a) $\nabla f_1(\bar{x})^T d \geq 0$

b) $\nabla f_2(\bar{x})^T d \geq 0$

$d \in \mathbb{R}^n$ è dir. di discesa se

c) $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$





$\nabla f(\bar{x})$ direzione di $\mathbb{R}^n$ di discesa ammissibile se
 $\nabla f(\bar{x})$ è contenuto nel cono generato da $\nabla \varphi_1(\bar{x})$ e
 $\nabla \varphi_2(\bar{x})$ ovvero se

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla \varphi_2(\bar{x}) \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) - \lambda_1 p_1(x) - \lambda_2 p_2(x) \quad (63)$$

Funzione Lagrangiana; λ_1, λ_2 moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x} \in X} f(x) \\ X = \begin{cases} p_1(x) \geq 0 \\ p_2(x) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A direzione di discesa ammissibile in $\bar{x} \in X$

Se:

$$\text{I) } \nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla p_1(\bar{x}) - \lambda_2 \nabla p_2(\bar{x}) = 0$$

$$\text{II) } \lambda_1 p_1(\bar{x}) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{condizioni di} \\ \text{complementarità} \end{array} \right\}$$

$$\text{III) } \lambda_2 p_2(\bar{x}) = 0$$

$$\text{IV) } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

1) $f_1(\bar{x}) > 0$; $f_2(\bar{x}) > 0 \Rightarrow$ per le cond. di (C4) complementarietà si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$

$$I) \quad \nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \boxed{\nabla f(\bar{x}) = 0}$$

2) $f_1(\bar{x}) = 0$; $f_2(\bar{x}) > 0 \Rightarrow$ per le cond. di comp. si ha $\lambda_2 = 0 \Rightarrow$

$$I) \quad \nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x}) = 0$$

con $\lambda_1 \geq 0$ (IV)

3) $f_1(\bar{x}) > 0$; $f_2(\bar{x}) = 0 \Rightarrow$ per le cond. di comp. si ha $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$

$$I) \quad \nabla_x L(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \nabla f(\bar{x}) - \lambda_2 \nabla f_2(\bar{x}) = 0$$

con $\lambda_2 \geq 0$

4) $f_1(\bar{x}) = 0$; $f_2(\bar{x}) = 0 \Rightarrow$

$$I) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla f_2(\bar{x})$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ (IV)

$$\min f(x)$$

$$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (65)$$

$$X \equiv \begin{cases} \begin{cases} h_1(x) = 0 \\ h_2(x) = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f_{m+1}(x) \geq 0 \\ f_{m+2}(x) \geq 0 \\ \vdots \\ f_{m+p}(x) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

m equazioni: $h_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $i = 1, \dots, m$
 p diseguatori: $f_j(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $j = m+1, \dots, m+p$

FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) - \sum_{j=m+1}^p \lambda_j f_j(x)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ \lambda_{m+1} \\ \vdots \\ \lambda_{m+p} \end{pmatrix}$$

VETTORE DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

CONDIZIONE DI QUALIFICAZIONE DEI VINCOLI ATTIVI (6)

$\bar{x} \in X$ si dice che $\bar{x}$ soddisfa la cond. di ~~qualificazione~~ ~~qualificazione~~ qualificazione dei vincoli attivi se i gradienti dei vincoli attivi calcolati in $\bar{x}$ sono vettori linearmente indipendenti.

$$X \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0, i=1, \dots, m; f_j(x) \geq 0, j=m+1, \dots, m+p\}$$

$\bar{x} \in X$ l'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$, $I_e(\bar{x})$ è

$$I_e(\bar{x}) = \{h_i(x) = 0, i=1, m; f_j(x) \geq 0 : f_j(\bar{x}) = 0, j=m+1, \dots, m+p\}$$

$$\left\{ \nabla h_1(\bar{x}), \nabla h_2(\bar{x}), \dots, \nabla h_m(\bar{x}), \nabla f_j(\bar{x}) : f_j(\bar{x}) = 0, j=m+1, \dots, m+p \right\}$$

lin. indipendenti $\Rightarrow \bar{x}$ soddisfa la condizione di qualificazione dei vincoli attivi $\Rightarrow \bar{x}$ è detto PUNTO REGOLARE

① Se in $\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ ho più di n vincoli attivi $\Rightarrow \bar{x}$ non può soddisfare le cond. di quel. dei vincoli attivi $\Rightarrow$ non è globale (66b)

② Se in $\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ il gradiente di un vincolo attivo calcolato in $\bar{x}$ è il vettore nullo $\Rightarrow \bar{x}$ non soddisfa le cond. di quel. dei vincoli attivi.

CONDIZIONI NECESSARIE DI MINIMO LOCALE PER (67)
PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA (PROBLEMI DI
PROGRAMMAZIONE
NON LINEARE /

CONDIZIONI DI KARUSH-K~~AR~~ KUHN-TUCKER (KKT)

Sia $x^* \in X$ un minimo locale e sia x^* un punto regolare $\Rightarrow$ esistere un vettore di moltiplicatori di Lagrange tale che:

- 1) $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$
 - 2) $h_i(x^*) = 0 \quad i=1, \dots, m$
 - 3) $f_j(x^*) \geq 0 \quad j = m+1, \dots, m+p$
 - 4) $\lambda_j^* \geq 0 \quad \text{per } j = m+1, \dots, m+p$
 - 5) $\lambda_j^* f_j(x^*) = 0 \quad \text{per } j = m+1, \dots, m+p$
- $\} \Leftrightarrow x^* \in X$

$$1) \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) - \sum_{T=m+1}^P \lambda_T^* \nabla g_T(x^*) = 0$$

(68)

$$4) \lambda_T^* \geq 0 \quad T=m+1, \dots, m+P$$

$$\text{Se } X = \begin{cases} g_{m+1}(x) \geq 0 & T=m+1, \dots, m+P \\ g_{m+P}(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$1)+4) \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x^*) = \sum_{T=m+1}^P \lambda_T^* \nabla g_T(x^*) \\ \lambda_T^* \geq 0 \quad T=m+1, \dots, m+P \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nel caso in cui X ~~se~~ è definito solo da vincoli
 di disuguaglianza le condizioni 1) e 4)

implicano che x^* è un minimo locale e punto
 estremo $\Rightarrow \nabla f(x^*)$ si può esprimere come combinazione
 conica dei $\nabla g_T(x^*)$ per $T=m+1, \dots, m+P$

$\Leftrightarrow \nabla f(x^*)$ è contenuto nel cono generato
 dai $\nabla g_T(x^*)$ per $T=m+1, \dots, m+P$

CANDIDATI A MINIMO LOCALE

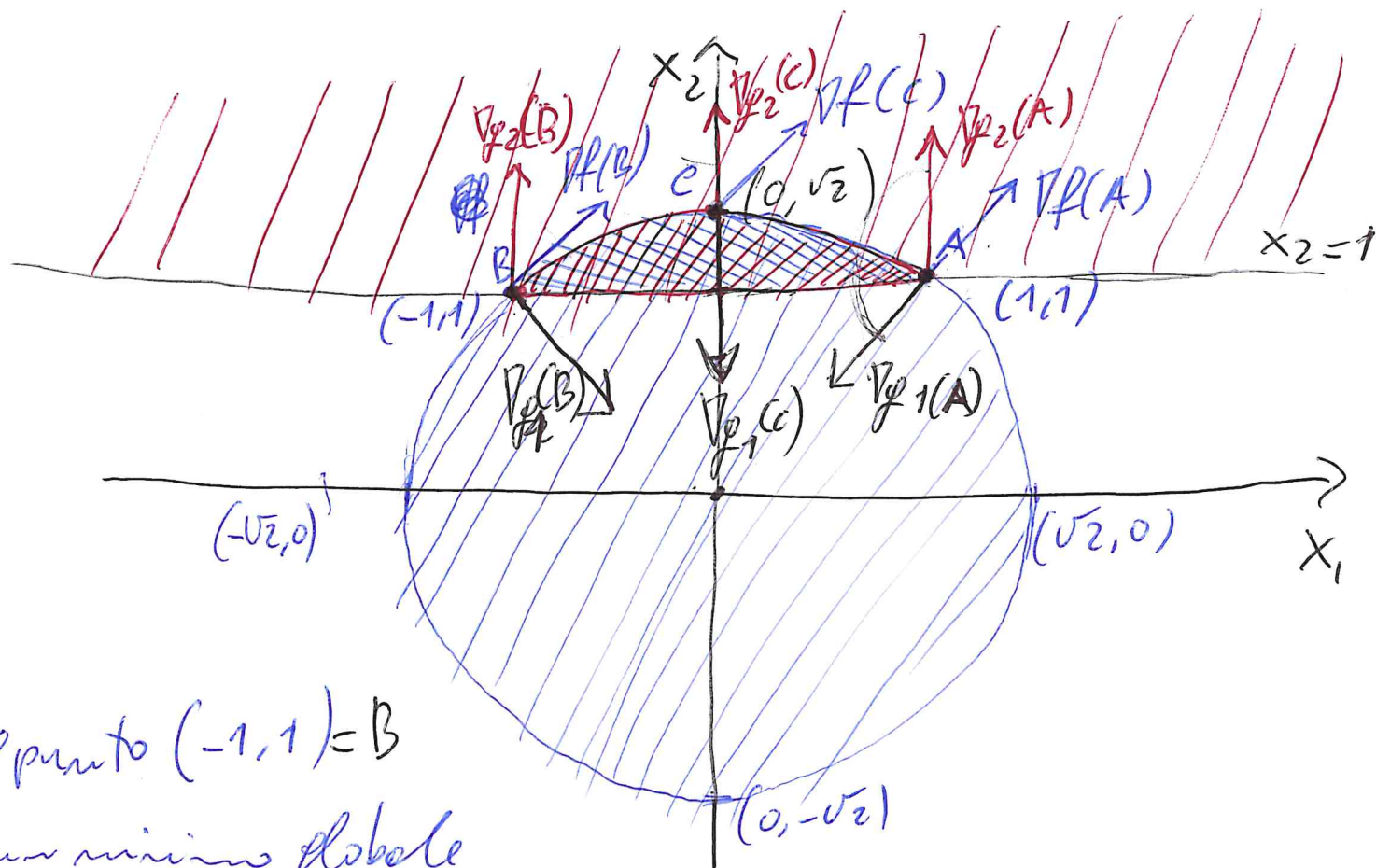
(69)

- I punti regolari che soddisfanno le KKT
- I punti non regolari

$$\min x_1 + x_2$$

(70)

$$X \equiv \begin{cases} f_1(x) = 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \\ f_2(x) = x_2 - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow x_2 \geq 1 \quad x \in \mathbb{R}^2$$



Il punto $(-1, 1) = B$

è un minimo globale
del problema perché in tale punto x_1 e x_2 sono minimi

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

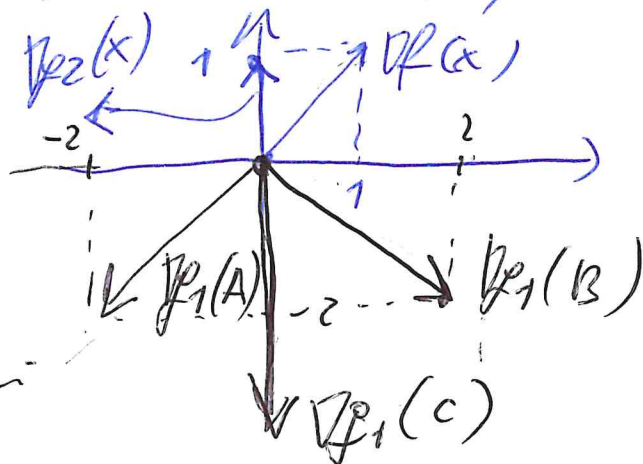
Punto $A = (1, 1)$

$$\nabla f_1(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \nabla f_2(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_1(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_1(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

A, B, C
Punti estremi



in $A = (1, 1)$ i vincoli attivi, sono $f_1(x) \geq 0$ e $f_2(x) \geq 0$
 $\nabla f_1(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\nabla f_2(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Sono lin. indep.

$\Rightarrow A$ è regolare

(71)

in $B = (\cancel{0, \sqrt{2}}) -1, 1$ entrambi i vincoli sono
attivi: $\nabla f_1(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Sono lin.
indep.

$\Rightarrow B$ è punto regolare

in $C = (0, \sqrt{2})$ è attivo il vincolo $f_1(x) \geq 0$

$\nabla f_1(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ lin. indep.

$\Rightarrow C$ è punto regolare

$$\begin{aligned} \min & -x_1 \\ X \equiv & \begin{cases} f_1(x) = -(x_1-1)^3 - x_2^2 \geq 0 \\ f_2(x) = x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (72)$$

$$f_1(x) \geq 0 \rightarrow -(x_1-1)^3 \geq 0 \Rightarrow (x_1-1)^3 \leq 0$$

$\Rightarrow x_1 \leq 1 \Rightarrow$ il ^{massimo} valore di x_1 che soddisfa il primo vincolo è $x_1 = 1$ in cui $f(x) = -1$ ha valore $\boxed{-1}$.

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ (altrimenti $f_1(x) \geq 0$ non sarebbe soddisfatto)
 $\rightarrow$ Satisfy anche $f_2(x) \geq 0$

$\Rightarrow A = (1, 0) \in X$ ed è minimo globale

$(1, 0)$ è punto regolare? i vincoli attivi sono $f_1(x) \geq 0$ $f_2(x) \geq 0$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} -3(x_1-1)^2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}; \quad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_1(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sono lin. ind. ?}$$

NO!

$\Rightarrow A = (1, 0)$ non è punto regolare !!

non valgono le KKT!
 (severo)

Consideriamo le KKT:

$$L(x, \lambda) = -x_1 - \lambda_1 \left(-(x_1 - 1)^3 - x_2^2 \right) - \lambda_2 x_1 x_2 \quad (73)$$

$$1) \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3\lambda_1^* (x_1 - 1)^2 - \lambda_2^* x_2 \\ +2\lambda_1^* x_2 - \lambda_2^* x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quando $x^* = (1, 0)$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -1 = 0, \text{ !! IMPOSSIBILE} \Rightarrow x^*$$

non soddisfa mai le KKT !!

CANDIDATI DI MINIMO LOCALE

- PUNTI NON REGOLARI
- I PUNTI REGOLARI CHE SODDISFANO LE KKT.

CASO CONVESSO

76

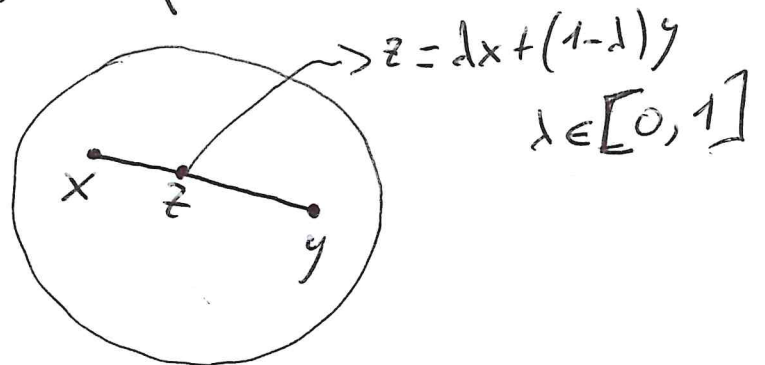
$$\min f(x)$$

$$X \equiv \begin{cases} h_i(x) = 0 & i=1, \dots, m \\ f_T(x) \geq 0 & T=m+1, \dots, m+p \end{cases}$$

$f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è funzione convessa

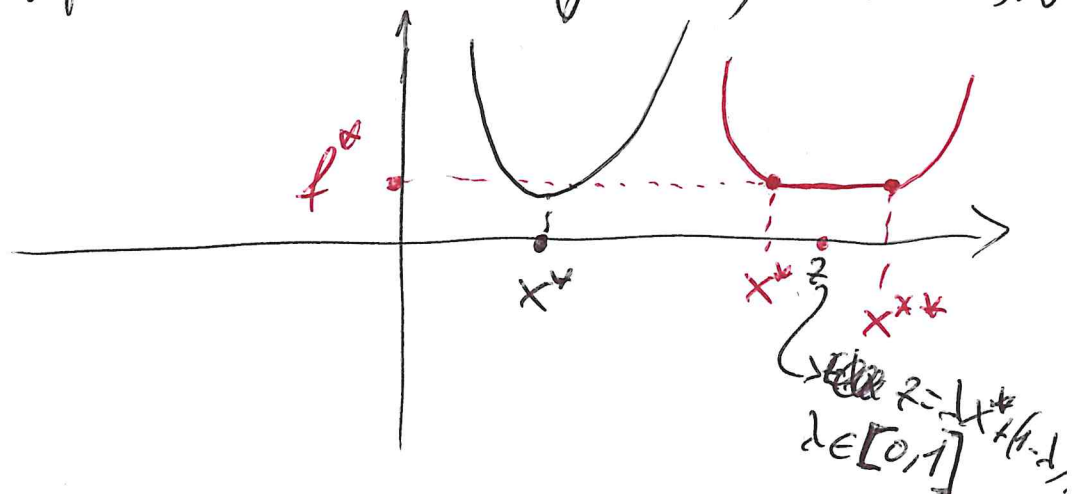
$$\forall x, y \in X \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

X convesso: $\forall x, y \in X \Rightarrow z = \lambda x + (1-\lambda)y \in X$



① Se x^* è minimo locale $\Rightarrow x^*$ è minimo globale

② L'insieme dei punti di minimo (globale) è convesso



L'insieme dei punti di minimo globale è convesso. (7.5 Div.)

Hp x^* , $x^{**} \in X$ punti di minimo globale $\boxed{f(x^*) = f(x^{**}) = f^*}$

Th $z = \lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}$ con $\lambda \in [0,1]$ è un punto di minimo globale

Per Hp la $f(x)$ è convessa $\lambda \in [0,1]$ $f(z) = f^*$

$$f(z) = f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}) \leq \lambda \underbrace{f(x^*)}_{f^*} + (1-\lambda) \underbrace{f(x^{**})}_{f^*} = f^*$$

$$\Rightarrow f(z) \leq f^* \Rightarrow f(z) = f^* \Rightarrow z \text{ è minimo globale}$$



Quando X è convesso?

(76)

Se $h_i(x)$ per $i=1, \dots, m$ sono funzioni lineari
e $f_j(x)$ $j=m+1, \dots, m+p$ sono funzioni talche $-f_j(x)$
è convessa ($f_j(x)$ è concava) $\Rightarrow$

$$X \equiv \begin{cases} h_i(x) = 0 & i=1, \dots, m \\ f_j(x) \geq 0 & j=m+1, \dots, m+p \end{cases} \quad \text{è un insieme convesso}$$

D/M.

H_p ① $h_i(x) = 0$ è lineare $\Rightarrow h_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_i$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \quad h_i(x) = 0 \Leftrightarrow a_i^T x + b_i = 0$$

$b_i \in \mathbb{R}$

② $-f_j(x)$ sono convessi $\forall x, y \in X \quad z = \lambda x + (1-\lambda)y$
 $\lambda \in [0, 1]$
 $\Rightarrow -f_j(z) = -f_j(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq -\lambda f_j(x) - (1-\lambda)f_j(y)$

Th. X è convesso $\Leftrightarrow$ $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in X$
 $\lambda \in [0, 1], x, y \in X$

$$\Leftrightarrow X \equiv \begin{cases} h_i(z) = 0 & i=1, \dots, m \\ f_j(z) \geq 0 & j=m+1, \dots, m+p \end{cases}$$

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y \quad \lambda \in [0, 1] \quad h_i(x) = e_i^T x + b_i = 0 \quad \forall$$

$$h_i(z) = e_i^T z + b_i = e_i^T (\lambda x + (1-\lambda)y) + b_i = \lambda \underbrace{e_i^T x}_{-b_i} + (1-\lambda) \underbrace{e_i^T y}_{-b_i} + b_i = 0$$

$$\text{poiché } x, y \in X \Rightarrow \begin{cases} h_i(x) = e_i^T x + b_i = 0 \\ h_i(y) = e_i^T y + b_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_i^T x = -b_i \\ e_i^T y = -b_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot (-b_i) + (1-\lambda)(-b_i) + b_i = 0 \quad !! \Rightarrow h_i(z) = 0$$

$\Rightarrow z$ soddisfa tutti i vincoli di impiegamento -

ora dimostro che $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ soddisfa i vincoli $f_J(z) \geq 0$

per la convessità dello $-f_J$

$$-f_J(z) = -f_J(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \underbrace{-\lambda f_J(x)}_{\leq 0} - \underbrace{(1-\lambda)f_J(y)}_{\leq 0} \quad \lambda \in [0, 1]$$

$$\text{poiché } x, y \in X \Rightarrow \begin{cases} f_J(x) \geq 0 \\ f_J(y) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \leq 0 \Rightarrow -\lambda f_J(x) - (1-\lambda)f_J(y) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f_J(z) \leq -\lambda f_J(x) - (1-\lambda)f_J(y) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_J(z) \geq 0 \Rightarrow z \text{ soddisfa tutti i vincoli}$$

$$\text{di impiegamento} \Rightarrow z \in X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \text{ è convesso} \quad \square$$

$$f_1(x^*) \geq 0 \quad ; \quad f_2(x^*) \geq 0 \quad ; \quad f_3(x^*) \geq 0$$

(79)

$$\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^* \geq 0$$

$$\lambda_1^* f_1(x^*) = 0 \quad ; \quad \lambda_2^* f_2(x^*) = 0 \quad ; \quad \lambda_3^* f_3(x^*) = 0$$

Condiz.
di
Complementari-
t 

Si possono distinguere diversi casi:

1) tutti i punti di X in cui nessun vincolo   attivo
 $\Rightarrow f_1(x^*) > 0 \quad ; \quad f_2(x^*) > 0 \quad ; \quad f_3(x^*) > 0 \Rightarrow$
 tutti i punti interni di X

Per le condizioni di compl. $\Rightarrow \lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -1 = 0 \quad !! \quad \underline{\underline{\text{IMPOSSIBILE}}}$$

$\Rightarrow$ nessun punto interno soddisfa le KKT

Ci sono punti non regolari?

No, perch  nessun vincolo   attivo $\Rightarrow$ cond. di qual.
 dei vincoli attivi   benelmente soddisfatte

2) punti in cui solo $f_1(x)$ è attivo $\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) > 0 \\ f_3(x) > 0 \end{cases}$ (punti delle rette $f_1(x) = 0$ esclusi i punti A, B, C)

$\exists$ punti non regolari? $\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ tutti i punti in questo caso sono regolari.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \lambda^*) = -1 - \lambda_1^* = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1^* = -1 < 0!!}$$

~~MA~~ $\lambda_1^* \geq 0!!$

$\Rightarrow$ Nessun punto soddisfa le KKT.

3) punti in cui solo $f_2(x)$ è attivo $\begin{cases} f_1(x) > 0 \Rightarrow \lambda_1^* = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ f_3(x) > 0 \Rightarrow \lambda_3^* = 0 \end{cases}$
 $\nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ tutti i punti in questo caso sono regolari.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \lambda^*) = -1 + \lambda_2^* = 0 \Rightarrow \lambda_2^* = 1 \quad \underline{OK!}$$

$\lambda_2^* \geq 0 \downarrow$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x^*, \lambda^*) = -1 - 2\lambda_2^* x_2^* = 0 \Rightarrow -1 - 2x_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_2(x^*) = -x_1 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

punto $D = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ Punto regolare che soddisfa le KKT $\Rightarrow$ candidato a minimo locale

4) punti in cui solo $f_3(x)$ attivo $\begin{cases} f_1(x^*) > 0 \Rightarrow \lambda_1^* = 1 \\ f_2(x^*) > 0 \Rightarrow \lambda_2^* = 0 \\ f_3(x^*) = 0 \end{cases}$ (SI)
 I punti non regolari!

$\nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ lin. indep. $\Rightarrow$ tutti i punti

in questo caso sono regolari.

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -1 - \lambda_3^* = 0 \Rightarrow \lambda_3^* = -1 \quad \text{!! IMP.}$$

$$\lambda_3^* \geq 0$$

5) Punti in cui solo $f_1(x) \geq 0$ e $f_2(x) \geq 0$ sono attivi $\Rightarrow$ $\begin{cases} f_1(x^*) = 0 \\ f_2(x^*) = 0 \\ f_3(x^*) \geq 0 \end{cases}$ $\left. \begin{array}{l} \text{Punti di intersezione} \\ \text{tra le prime rette e} \\ \text{le parabole} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow$ punti $B = (1, 1)$; $C = (9, 3) \rightarrow \lambda_3^* = 0$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

I punti sono regolari?

$$B \Rightarrow \nabla f_1(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{lin.} \\ \text{indep.} \end{array}$$

$$C \Rightarrow \nabla f_1(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2(C) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{lin.} \\ \text{ind.} \end{array} \Rightarrow C \text{ regolari}$$

B regolari

$$B = (1, 1) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1^* - 2\lambda_2^* = 0 \end{cases} \quad (x^2) \quad (p_2)$$

$$-3 + 2\lambda_1^* = 0 \Rightarrow \lambda_1^* = \frac{3}{2} > 0$$

OK!

$$\Rightarrow \lambda_2^* = \frac{5}{2} \quad \underline{\underline{OK!}}$$

$\Rightarrow$ Puncto   un puncto admisibil, deoarece
de  solu ie la KKT $\Rightarrow B$   candidatul
minim local

$$C = (9, 3) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1^* - 6\lambda_2^* = 0 \end{cases} \quad \times 4$$

$$= -5 - 2\lambda_2^* = 0 \Rightarrow \lambda_2^* = -\frac{5}{2} < 0$$

!!

$$\lambda_2^* \geq 0$$

C   un puncto admisibil care nu  solu ie la KKT $\Rightarrow$
nu   admisibil sau este un minim local.